Vorlesung Algebra

SoSe'21, hhu
K. Halupczok

Teil I: GRUPPEN

A3: Gruppenoperationen

Stichworte: Def. Gruppenoperation, Linkstranslation, Konjugation, Bahn, Isotropiegruppe, Bahnengleichung, Zentralisator, Klassengleichung, p-Gruppen $\neq e$ haben ein Zentrum $\neq e$, Gruppen der Ordnung p^2 sind abelsch

---

3.1. Einleitung: Wir führen Gruppenoperationen ein. Vermöge Linkstranslation oder Konjugation können Gruppen auch auf sich selbst operieren. Eine Gruppenop. zerlegt die Menge X, auf der G op., in Bahnen. Wir zeigen die Bahnen- und die Klassengleichung. Weiter sind bestimmte Eigenschaften von p-Gruppen interessante Anwendungen davon.

3.2. Def.: Sei G Gruppe, X Menge. Eine Operation von G auf X (auch: Gruppenwirkung) ist eine Abb. $T: G \times X \to X$

$$(a, x) \mapsto T_a(x) \quad \text{mit:}$$

(i) $\forall x \in X: T_e(x) = x$, d.h. $T_e = id_X$,

(ii) $\forall a, b \in G \ \forall x \in X: T_{ab}(x) = T_a(T_b(x)) = T_a \circ T_b(x)$.

„G operiert auf X (vermöge T)" (auch "G wirkt auf X")

Schreiben oft: ax statt $T_a(x)$. Damit:

(i') $\forall x \in X: ex = x$

(ii') $\forall a, b \in G \ \forall x \in X: (ab)x = a(bx)$.

3.3 Bsp.: $T_{a^{-1}} \circ T_a \overset{(ii)}{=} T_{a^{-1}a} = T_e = id_X$, ebenso: $T_a \circ T_{a^{-1}} = id_X$.
Alle T_a sind daher Bijektionen von X auf sich.

3.4. Bsp.: S_n operiert auf $X = \{1, \dots, n\}$ vermöge

$$S_n \times X \to X$$
$$(\sigma, i) \mapsto \sigma(i) =: \sigma i$$

Denn: $ei = e(i) = id_X(i) = i$, $(\sigma\tau)i = \sigma(\tau(i)) = \sigma(\tau i)$.

3.5. Bsp.: K Körper, $G := GL(n,K)$ operiert auf K^n vermöge

$$GL(n,K) \times K^n \to K^n$$
$$(A, x) \mapsto Ax.$$

Denn: $Ix = x$, $(AB)x = A(Bx)$.

3.6. Bsp.: G Gruppe, G operiert auf $X := G$ vermöge der Linkstranslation

$$G \times G \to G$$
$$(a, x) \mapsto l_a(x) := ax.$$

Denn: $ex = x$, $(ab)x = a(bx)$.

3.7. Bsp.: G Gruppe, G operiert auf $X := G$ vermöge der Konjugation

$$G \times G \to G$$
$$(a, x) \mapsto axa^{-1} \quad (\text{Konjugation mit } a).$$

Denn: $exe^{-1} = x$, $(ab)x(ab)^{-1} = a(bxb^{-1})a^{-1}$

Die Bahnen der Konjugation heißen Konjugationsklassen, vgl. Def. 3.10.

3.8. Def.: G operiere auf X. Dann: $x \sim y :\Leftrightarrow \exists a \in G : ax = y$.

3.9. Lemma: $\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation auf X.

Bew.: (i) $ex = x \Rightarrow x \sim x$, (ii) $x \sim y \Rightarrow \exists a \in G : ax = y \Rightarrow x = a^{-1}y \Rightarrow y \sim x$,

(iii) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow \exists a, b \in G : ax = y \wedge by = z \Rightarrow b(ax) = (ba)x = z \Rightarrow x \sim z$. $\square$

3.10. Def.: Die $\sim$-Äquivalenzklassen heißen Bahnen (bzw. orbits):

$Gx := \{ax;\ a \in G\}$ Bahn von $x \in X$.

G operiert transitiv auf X, falls X aus nur einer Bahn besteht.

3.11. Satz: Die Einschränkung einer Gruppenoperation auf eine Bahn ist transitiv.

3.12. Def.: Sei $x \in X$. $Iso(x) := \{a \in G;\ ax = x\}$ Isotropiegruppe von x, bzw. Stabilisator von x.

3.13. Lemma: $Iso(x)$ ist UG von G.

Bew.: $a, b \in Iso(x) \Rightarrow (ab^{-1})x = a(b^{-1}x) \overset{bx=x}{=} ax = x \Rightarrow ab^{-1} \in Iso(x)$. $\square$

Ü Ist $Iso(x)$ auch NT?

3.14. **Satz** (Bahnengleichung):
G endl. Gruppe, G op. auf endl. Menge X,
$x_1, \dots, x_m$ vollst. Repräsentantensystem für Bahnen, d.h. $X = Gx_1 \dot\cup \dots \dot\cup Gx_m$.
Dann: $\#X = \sum_{i=1}^{m} [G : \mathrm{Iso}(x_i)]$.

Bew.: Betr. Bahn Gx. Für $a, b \in G$ gilt:
$ax = bx \iff b^{-1}(ax) = b^{-1}(bx) = x \iff b^{-1}a \in \mathrm{Iso}(x) \iff a\,\mathrm{Iso}(x) = b\,\mathrm{Iso}(x)$,
d.h. $\varphi : G/_{\mathrm{Iso}(x)} \longrightarrow Gx$
$a\,\mathrm{Iso}(x) \longmapsto ax$ ist Bijektion.
Da G endl., folgt: $\#Gx = \#G/_{\mathrm{Iso}(x)} = [G : \mathrm{Iso}(x)]$,
insgesamt: $\#X = \sum_{i=1}^{m} \#Gx_i = \sum_{i=1}^{m} [G : \mathrm{Iso}(x_i)]$. $\square$

3.15. **Def.:** Betr. Konjugation auf G. Für $x \in G$ heißt $Z(x) := \mathrm{Iso}(x) = \{a \in G;\ \underbrace{ax = xa}_{axa^{-1} = x}\}$ Zentralisator von x.

3.16. **Satz** (Klassengleichung): $\#G = \underbrace{\#\underbrace{Z}_{Z(G)}}_{=:r} + \sum_{i=r+1}^{m} \underbrace{[G : Z(x_i)]}_{\geq 2}$.

Bew.: Für $x \in G$ gilt:
$\{x\}$ Bahn $\iff \forall a \in G : axa^{-1} = x \iff \forall a \in G : ax = xa \iff x \in Z(G)$.
Sei $G = Gx_1 \dot\cup \dots \dot\cup Gx_m$ die Bahnenzerlegung vermöge der Konjugation,
Somit $Gx_1 \dot\cup \dots \dot\cup Gx_r = Z(G)$, $\#Gx_i = 1$ für $1 \leq i \leq r$.
Somit: $\#G = \sum_{i=1}^{m} [G : Z(x_i)] = \underbrace{\#Z(G)}_{=r} + \sum_{i=r+1}^{m} \underbrace{[G : Z(x_i)]}_{\geq 2}$. $\square$

3.17. **Def.:** $p \in \mathbb{N}$ prim, G endl. Gruppe der Ordnung p^s $(s \in \mathbb{N})$ heißt **p-Gruppe**.

3.18. **Satz:** p-Gruppen $\neq e$ haben ein Zentrum $\neq e$.
Bew.: $p \mid \#G$ und $p \mid [G : Z(x)]$ für alle $x \in G$.
$\overset{3.16}{\Longrightarrow} p \mid \#Z(G) \Rightarrow Z(G) \neq e$. $\square$

3.19. **Lemma:** $\#G = p^2 \Rightarrow G$ abelsch (p prim).

Bew.: Ann.: G nicht abelsch $\overset{3.18}{\Rightarrow} \#Z(G) = p$

$\overset{A2.19}{\Rightarrow} Z(G)$ zyklisch, sei $Z(G) = \langle a \rangle$.

Sei $b \in G \setminus Z(G)$.

Dann: $Z(G) \subsetneq \langle a, b \rangle \subseteq G$.

Da $\#\langle a, b \rangle \mid \#G = p^2 \Rightarrow \langle a, b \rangle = G$

Wegen $a \in Z(G)$ ist: $ab = ba$.

$\Big\}$ G doch abelsch, $\lightning$. $\square$