

Vorlesung Algebra

SoSe'21, hhu

Teil II: RINGE (und Moduln)

K. Halupczok

A17: Endlich erzeugte Moduln über HIBen

Stichworte: freie und endl. erz. Teilmoduln, Zerlegung endl. erz. Moduln in freien und Torsionsmoduln, p-Torsionsteil, p-Modul, direkte Summenzerlegung endl. erz. p-Moduln in zyklische, Hauptsatz über endl. erz. Moduln über HIBen, Jordansche Normalform und Satz von Cayley als Anwendung

17.1. Einleitung: Die Theorie der endl. erz. Moduln über einem HIB A verläuft analog der Theorie der endl. erz. ab. Gruppen, die Beweise lassen sich übertragen. Wir betrachten in diesem Kapitel nur Moduln über HIBen.

17.2. Satz: Jeder TM (=Teilmodul) M eines endl. erz. freien A-Moduls F über einem HIB A ist frei mit Rang M ≤ Rang F.

17.3. Kor.: Jeder TM eines endl. erz. A-Moduls ist endl. erz.

Bew.: Betr. $\pi: F \rightarrow M \cong N$ nach A16.20, dabei ist $\pi(\pi^{-1}(N)) = N$ und $\pi^{-1}(N)$ ist frei vom Rang $\leq \text{Rang } F$, also N endl. erz. \square

17.4. Satz: Jeder endl. erz. torsionsfreie A-Modul ist frei.

17.5. Kor.: Jeder endl. erz. A-Modul M ist innere direkte Summe $M = T(M) \oplus F$, mit F frei.

17.6. Daf.: Sei A HIB, $p \in A$ prim, M ein A-Modul. Dann heißt $M_p := \{x \in M; \exists r \in \mathbb{N}: p^r x = 0\}$ der p-Torsionsteil von M. M heißt p-Modul, falls $M = M_p$.

17.7. Bem.: $M_p \subseteq T(M)$ Teilmodul, $0 \neq x \in M_p \Rightarrow \text{Ann}(x) = (p^\infty)$ für ein $m \in \mathbb{N}$.
Ferner: $T(M) = M = \bigoplus_{p \text{ prim}} M_p$.

17.8. Satz: Sei M ein A-Torsionsmodul und P ein Repräsentantsystem für die primen Assoziiertheitsklassen d.h. a ~ b $\Leftrightarrow \exists m \in A^\times: am = b$.

Dann: $M = \bigoplus_{p \in P} M_p$.

17.9. Bsp.: Sei $M = Ax \neq 0$ ein zyklischer p -Modul, $p \in A$ prim.

Dann ist $A \rightarrow M$, $a \mapsto ax$, surj. Modul-Hom. mit Kern $\text{Ann}(x) = (p^r)$ für ein $r \in \mathbb{N}$.

Es folgt: $M \cong A/(p^r)$, ist Modul-Iso.

Die Teilmoduln von M stehen in Bijektion mit den Idealen $I = (a)$ mit $(p^r) \subseteq I = (a)$, dies sind genau die Ideale $(p^r) \subsetneq (p^{r-1}) \subsetneq \dots \subsetneq (p) \subsetneq (1) = A$.

Die Teilmoduln von M sind also genau

$$\underbrace{0 = (p^r)x}_{p^r M} \subsetneq \underbrace{(p^{r-1})x}_{p^{r-1} M} \subsetneq \dots \subsetneq \underbrace{(p)x}_{p M} \subsetneq \underbrace{(1)x = M}_{PM}$$

Ferner ist $A \rightarrow p^i M$, $a \mapsto ap^i x$, für $0 \leq i \leq r$, surj. mit Kern (p^{r-i}) .

Also ist $p^i M \cong A/(p^{r-i})$.

17.10. Satz: Sei $p \in A$ prim. Jeder endl. erl. p -Modul M ist innere direkte Summe

von zyklischen Moduln: $M = \bigoplus_{i=1}^r A y_i$ mit $y_1, \dots, y_m \in M \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, und best.,

ebenso die Folge $(\text{Ann}(y_1), \dots, \text{Ann}(y_m))$ bis auf Permutation ihrer Glieder.

Bew.: (i) Ex.: VI nach m: M erl. von m El. $\Rightarrow M$ von gewünschter Form (17.14).

(ii) Einf.: VI nach r mit $p^r M = 0$, r minimal. $r=0$: ✓

$r > 0$: Sei $\bigoplus_{i=1}^m A y_i = \bigoplus_{j=r+1}^m A z_j$, sowie $\text{Ann}(y_i) = (p^{r_i})$, $\text{Ann}(z_j) = (p^{s_j})$,

und $0 \leq 1 = r_1 = \dots = r_m < r_{m+1} \leq \dots \leq r_m \leq r$, ||

und $1 = s_1 = \dots = s_j < s_{j+1} \leq \dots \leq s_m \leq r$. ||

Es gilt $p^{r-m}(pM) = 0$, also $pM = \bigoplus_{i=r+1}^m A(p y_i) = \bigoplus_{j=r+1}^m A(p z_j)$,

und $\text{Ann}(p y_i) = (p^{r_i})$, $\text{Ann}(p z_j) = (p^{s_j})$.

Nach IV gilt $m - r = m - r$ und $r_{m+i} = s_{j+i}$ für $r \leq i \leq m - r$.

Nun ist $A y_i / A(p y_i) \cong A/(p)$.

Γ Betr. $A \rightarrow A y_i \rightarrow A y_i / A(p y_i)$

$a \mapsto a y_i \mapsto a y_i + A(p y_i)$, hat Kern (p) :

Sei $a y_i = b p y_i$ für ein $b \in A$, dann ist $(a - bp)y_i = 0$,

also $a - bp \in \text{Ann}(y_i) = (p^{r_i})$, d.h. $p | a$. □

Somit ist $M/pM \cong \bigoplus_{i=1}^m A/(p) \cong \bigoplus_{j=r+1}^m A/(p)$,

dies ist ein $A/(p)$ -Modul, wo $A/(p)$ Körper, d.h. M/pM ein VR der

Dimension m bzw. m . Also ist $m = m$. □

17.11. Bem.: In der Darst. von 17.10 ist $Ay_i \cong A/(p^{r_i})$ nach 17.9.

17.12. Hauptsatz über endl. erz. Moduln über einem HIB:

Sei A HIB. Dann ist jeder endl. erz. A -Moduln M von der

$$\text{Gestalt } M = A^m \oplus \bigoplus_{p \in P} \bigoplus_{i=1}^{m(p)} A/(p^{r_i}) = A^m \oplus \bigoplus_{i=1}^m A/(p_i^{r_i}),$$

wobei $m \in \mathbb{N}$ end. best. Ebenso ist die Folge $(p_1^{r_1}, \dots, p_m^{r_m})$ von

Primpotenzen $p_i^{r_i} \in A$ ($p_i \in A$ prim, $r_i \geq 1$) bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit ihrerglieders end. bestimmt.

17.13. Anwendung: VR mit Endomorphismen.

Sei K Körper, V endl. dim. K -VR, φ Endo von V ,

V ist $K[T]$ -Modul vermöge $T \cdot v := \varphi(v)$, d.h. $(\sum_{i=0}^r a_i T^i) \cdot v = \sum_{i=0}^r a_i \varphi^i(v)$.

* V ist endl. erz. $K[T]$ -Torsionsmodul.

↑ Jede K -Basis erz. V . Sei ferner $v \in V$, $v \neq 0$, $m := \dim_K V$.

Dann sind $v, T \cdot v, T^2 \cdot v, \dots, T^{m-1} \cdot v$ K -lin. abh., d.h. es ist

$$\sum_{i=0}^m a_i (T^i \cdot v) = 0 \text{ für } a_i \in K, \text{ nicht alle } = 0.$$

Also ist $(\sum_{i=0}^m a_i T^i) \cdot v = 0$, d.h. v Torsionselement.

* Spezialfall: Sei $V = K[T] \cdot v \cong K[T]/(f)$ mit $(f) = \text{Ann}(v)$,

$\Leftrightarrow f$ normiert. Dann bildet $\mathcal{B}: (v, T \cdot v, \dots, T^{m-1} \cdot v)$ eine K -Basis von V .

↑ Sei $\sum_{i=0}^m b_i (T^i \cdot v) = 0 = (\sum_{i=0}^m b_i T^i)(v)$, also $\sum_{i=0}^m b_i T^i \in \text{Ann}(v) = (f)$,

d.h. $\sum_{i=0}^{m-1} b_i T^i = 0$, weil $m = \dim V = \deg(f)$. Also sind alle $b_i = 0$.

Sei $f = T^m + a_{m-1} T^{m-1} + \dots + a_1 T + a_0$.

Es gilt:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & & -a_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & \ddots & \ddots & -a_{m-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{m-1} \end{pmatrix} =: A, \quad (*)$$

da $\varphi(T^{m-1} \cdot v) = T^m \cdot v = -a_{m-1} (T^{m-1} \cdot v) - \dots - a_0 v$.

Für das charakteristische Polynom P_{φ} gilt:

$$P_{\varphi}(T) = \det(-M_{\mathcal{B}}(\varphi) + TE_m) = \det(TE_m - A) = f(T).$$

* Allgemeiner Fall: Nach 17.12 gilt $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$,

die $V_i \cong K[T]/(p_i^{e_i})$, $p_i \in K[T]$ irreduz., seien $f_i := p_i^{e_i}$, $(p_i^{e_i}) = \text{Ann } v_i$,

Dann: $V = (K[T]v_1) \oplus \dots \oplus (K[T]v_r)$.

f_i normiert.

Die Matrix von φ bzgl. einer geeign. Basis B ist

$$A := M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_r \end{pmatrix} \text{ mit } A_i \text{ von der Form } \star.$$

[Wende Spezialfall auf die Endos $\varphi|_{V_i}$ an!]

Diese Darstellung heißt rationale Normalform.

(Auch: Verallgemeinerte Jordansche Normalform)

Wieder gilt: $P_\varphi(T) = \det(TE_m - A) = f_1 \cdots f_r = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$.

Dabei $(f_1 \cdots f_r)v_i = 0$ für alle i , also $P_\varphi V = (f_1 \cdots f_r)V = 0$.

Somit: Satz von Cayley: $P_\varphi(\varphi) = 0$.

* Sei $K = \mathbb{C}$: Dann sind die p_i linear, etwa $p_i = T - b_i$.

Ferner ist $V_i = K[T]v_i \cong K[T]/((T - b_i)^{e_i})$.

Es ist $B_i: (v_i, (T - b_i)v_i, (T - b_i)^2v_i, \dots, (T - b_i)^{e_i-1}v_i)$

Basis von V_i . Unabh.: $\sum_{j=0}^{e_i-1} c_j (T - b_i)^j \in ((T - b_i)^{e_i}) \Rightarrow \text{All } c_j = 0$.

Es ist

$$M_{B_i}(\varphi|_{V_i}) = \begin{pmatrix} b_i & & 0 \\ 1 & b_i & & \\ 0 & 1 & b_i & \\ \vdots & \ddots & 0 & b_i \end{pmatrix}, \text{ da } \varphi(v_i) = Tv_i = (T - b_i)v_i + b_i v_i$$

und $\varphi((T - b_i)v_i) = T(T - b_i)v_i = (T - b_i)^2v_i + b_i(T - b_i)v_i, \dots,$

$$\varphi((T - b_i)^{e_i-1}v_i) = T(T - b_i)^{e_i-1}v_i = \underbrace{(T - b_i)^{e_i}v_i}_{=0} + b_i(T - b_i)^{e_i-1}v_i.$$

Dies ist die Jordansche Normalform.