WiSe'21/'22, hhu
K. Halupczok

Vorlesung Einführung in die Zahlentheorie

EZ2: Hauptsatz der Arithmetik

Stichworte: Primzahl, Unendlichkeit der Primzahlmenge, Sieb des Eratosthenes, Lemma von Euklid, Satz von der eindeutigen PFZ / Hauptsatz der Arithmetik, Primfaktorzerlegung, PFZ des ggT und kgV

2.1. Einleitung:
Die Primzahlen als multiplikative Bausteine der ganzen Zahlen bilden eine wichtige Teilmenge von $\mathbb{N}$. Der Hauptsatz der Arithmetik besagt, dass jede natürliche Zahl in ein Produkt von Primzahlen zerlegt ("faktorisiert") werden kann, wobei die Darstellung bis auf die Reihenfolge der Primfaktoren eindeutig ist.

2.2. Def.: (1) $p \in \mathbb{N}$ heißt Primzahl (oder prim), wenn $p > 1$ ist und nur die natürlichen Teiler 1 und p besitzt (d.h. wenn die Anzahl der natürlichen Teiler von p gleich 2 ist).
$\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N};\ p \text{ prim}\}$ ist die Menge aller Primzahlen, also $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$.
(2) $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ heißt zusammengesetzt, wenn n keine Primzahl ist.

Wir zeigen nun auf 3 verschiedene Weisen die Unendlichkeit von $\mathbb{P}$.

2.3. Satz (Unendlichkeit von $\mathbb{P}$): Es existieren unendlich viele Primzahlen, d.h. $\#\mathbb{P} = \infty$.

2.4. 1. Bew. (nach Euklid): Jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ besitzt mindestens einen Primteiler (also Teiler, der Primzahl ist), z.B. den kleinsten Teiler d von n mit $1 < d \le n$.
Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}$ verschiedene Primzahlen.
Dann ist jeder Primteiler von $n := 1 + p_1 \cdots p_k > 1$ von $p_1, \dots, p_k$ verschieden.
[Denn aus $q \in \mathbb{P}$ mit $q \mid n$ und $q \mid p_j$ folgte $q \mid n - p_1 \cdots p_k = 1$, $\lightning$.]
Auf diese Weise können unendlich viele Primzahlen gewonnen werden. □

2.5. Bem.: $a_n := p_1 \cdots p_n + 1$ ist Primzahl für $n \le 5$, aber nicht allgemein:
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$ ist zusammengesetzt!

2.6. Bem.: $p_n \le 2^{2^{n-1}}$: IA: $p_1 = 2 = 2^{2^0}$, $p_{n+1} \overset{\text{Euklid}}{\le} p_1 \cdots p_n + 1 \overset{\text{I.V.}}{\le} 2^{1+2^1+2^2+\dots+2^{n-1}} + 1 = 2^{2^n - 1} + 1 \le 2^{2^n} = 2^{2^{(n+1)-1}}$. ✓
Also: $\#\{p \le 2^{2^{n-1}}\} \ge n$, und $\#\{p \le x\} \ge \log_2 \log_2(x) + 1 \ge \log\log(x) \to \infty$. (Miserable Abschätzung!)

2.7. **2. Beweis (nach Euler):** Angenommen, es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ und $p_1, \dots, p_k$ prim so, dass $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_k\}$, d.h. $p_1, \dots, p_k$ seien alle Primzahlen. Dann ist das Produkt
$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^{\ell}$$ konvergent, da es endlich ist.

Mit dem Satz 2.14 zur Eindeutigkeit der PFZ (= Hauptsatz der Arithmetik), in dessen Beweis die Unendlichkeit der Primzahlenlage nicht benutzt wird (!), sieht man, dass das (Cauchy-)Produkt mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ übereinstimmt.
Die Divergenz der harmonischen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{17} + \dots\right)}_{> 16 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{2}} \dots$
ergibt einen Widerspruch. □

2.8. **3. Beweis (mit Fermatzahlen):** Im Zusammenhang mit der Frage nach der Konstruierbarkeit des regulären n-Ecks ($n \in \mathbb{N}$) mit Zirkel und Lineal taucht das Problem auf, welche der Zahlen $2^m + 1$ mit $m \in \mathbb{N}$ prim sind. (Vgl. Vorlesung Algebra, A 26.13 ff.)
Weil für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\ell \in \mathbb{N}$ mit $2 \nmid \ell$ gilt, dass $2^{ak} + 1 = (2^a + 1) \cdot (2^{a(\ell-1)} - 2^{a(\ell-2)} + - \dots + 1)$ zerlegbar ist, kann dies nur der Fall sein, wenn m selbst eine 2er-Potenz ist.
Die Zahlen $F_n := 2^{2^n} + 1$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ heißen Fermat-Zahlen.
Beh.: Diese Zahlen sind paarweise teilerfremd: $\forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m: \ (F_n, F_m) = 1$.

(ü)

Jede unendliche Folge paarweise teilerfremder Zahlen liefert unendlich viele Primzahlen. □

2.9. **Bem.:** Die Tatsache, dass $F_1, \dots, F_4$ prim sind, führte Fermat zur Vermutung, dass dies für alle F_n zutrifft. Euler konnte dies durch die Zerlegung $F_5 = 641 \cdot 6\,700\,417$ widerlegen. Ebenso sind F_6, F_7, F_8 Produkte aus zwei Primzahlen. Bis heute ist kein weiteres primes F_n bekannt. Aber auch nicht, ob es unendlich viele zusammengesetzte Fermatzahlen gibt.

Ein einfaches Verfahren zur Aufstellung von Primzahllisten / Primzahlüberprüfung ist folgender

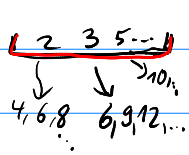
2.10. Algorithmus (Sieb des Eratosthenes): Sei $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

1) Schreibe die Zahlen $2, 3, \dots, N$ auf.

2₁) Streiche die echten Vielfachen von 2. ("Fallen durch das Sieb")

2₂) Gehe zur nächsten nicht gestrichenen Zahl
und streiche hiervon alle echten Vielfachen usw. ("Fallen durch das Sieb")

3) Stoppe, wenn die nächste ungestrichene Zahl $> \sqrt{N}$ ist.



Ergebnis/Beh.: Die nicht gestrichen Zahlen ("die im Sieb behalten") sind genau alle Primzahlen $\leq N$.

Bew.: Es geht keine Primzahl verloren, denn es werden nur echte Vielfache von Zahlen ≥ 2 gestrichen.
- Jedes zusammengesetzte $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq N$ wird gestrichen, denn es hat einen Primteiler $p \leq \sqrt{N}$.
(Hätte n sonst nur Primteiler $> \sqrt{N}$, etwa p_1 und p_2, wäre bereits $p_1 \cdot p_2 > (\sqrt{N})^2 = N$ ↯.)
- Ein $p \leq \sqrt{N}$ wird nicht gestrichen, jedes n als echtes Vielfaches von p wird gestrichen ("fällt durch das Sieb").
□

2.11. Bsp.: 101 ist prim, denn $\sqrt{101} \approx 10.05$, haben ≤ 10 die Pzen $2, 3, 5, 7 \nmid 101$ [$2, 3, 5 \nmid 101$], $7 \nmid 14 \cdot 7 + 3 = 101$

2.12. Bsp.: Die Primzahlen zwischen 1 und 30 erzeugt man mit den kleinen Pzen $p \leq \sqrt{30} \approx 5.5$ so:

~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~7~~, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, ~~11~~, ~~12~~, ~~13~~, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, ~~17~~, ~~18~~, ~~19~~, ~~20~~,
~~21~~, ~~22~~, ~~23~~, ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, ~~29~~, ~~30~~ Ungestrichen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

Mit diesem Verfahren werden insbesondere die Primzahlen im großen Bereich zwischen $\sqrt{N}$ und N effektiv gefunden. (Dann damit die zwischen N und N^2, weiter zw. N^2 und N^3, ...)

Wir zeigen jetzt den Hauptsatz der Arithmetik, der grundlegend zur multiplikativen Struktur von $\mathbb{Z}$ ist.

Ein Hilfssatz zum Beweis ist folgendes Lemma, das das Lemma von Bézout 1.13 benutzt.

2.13. Lemma von Euklid: $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist genau dann eine Primzahl, wenn gilt:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}: (p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b).$$

Bew.: „⇒": Sei $p \in \mathbb{P}$, seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $p \mid ab$. Ist $d := (p, a) > 1$, so muss $d = p$ sein.
Dann folgt $p \mid a$. Im Fall $(p, a) = 1$ folgt $p \mid b$ nach dem Gauß-Lemma 1.16. (2).

„⇐": Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ zusammengesetzt. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $n = n_1 n_2$. ↑mit Bézout!
Insbesondere gilt $n \mid n_1 n_2$. Wegen $n_1 > 1$, $n_2 > 1$ ist $n > \max\{n_1, n_2\}$, so dass $n \nmid n_1$ und $n \nmid n_2$. □

2.14. **Satz von der eindeutigen Primfaktorzerlegung / Hauptsatz der Arithmetik:**
Jedes $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, besitzt genau eine Darstellung

$$n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$$

mit $r \in \mathbb{N}$, $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}$ und $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}$ mit $p_1 < p_2 < \dots < p_r$.

Anders formuliert: Es gibt genau eine Funktion $\alpha : \mathbb{P} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, $(p,n) \mapsto \alpha_{p,n}$ mit $n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_{p,n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei ist das Produkt über alle Primzahlen erstreckt, und $\alpha_{p,n} \neq 0$ gilt bei festem n nur für endlich viele $p \in \mathbb{P}$.

2.15. Bem.: Es ist $\alpha_{p,1} = 0$ für alle $p \in \mathbb{N}$.

2.16. Def.: Die Darstellung in 2.14 heißt Primfaktorzerlegung (Kurz: PFZ) bzw. kanonische Zerlegung.

2.17. Bem.: Obwohl der Satz von der eind. PFZ intuitiv wesentlich früher benutzt wurde, ist er erst von Gauß in exakter Form angegeben (und bewiesen) worden.
$\mathbb{N} \underset{\text{bij}}{\cong} \mathbb{N}_0^{(\mathbb{P})} = \{(e_p)_{p \in \mathbb{P}};\ e_p \in \mathbb{N}_0,\ e_p = 0 \text{ für alle } p \text{ bis auf endlich viele Ausnahmen}\}$.

2.18. Bew. (von 2.14): 1. Existenz: Der Beweis verläuft induktiv.
Falls $n \in \mathbb{N}$ nicht prim ist, zerfällt es in zwei Faktoren $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $n = n_1 n_2$.
Wegen $\min\{n_1, n_2\} > 1$ und $n = n_1 n_2$ ist $\max\{n_1, n_2\} < n$.
Nach Induktionsvoraussetzung sind n_1 und n_2 Produkte von Potenzen von Primzahlen.
Also ist auch $n = n_1 n_2$ ein Produkt aus Potenzen von Primzahlen.
2. Eindeutigkeit: Es gebe Zahlen mit (mind.) zwei Darstellungen, sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ die kleinste unter diesen. Seien $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}$, $q_1, \dots, q_\ell \in \mathbb{P}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \dots, \beta_\ell \in \mathbb{N}$ mit $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = q_1^{\beta_1} \cdots q_\ell^{\beta_\ell}$ ⊛.
Es ist $p_i \neq q_j$ für alle $j \leq \ell$, da sonst in ⊛ durch p_i dividiert werden könnte und man ein kleineres $\tilde{n}$ mit zwei Darstellungen erhielte. Also ist $(p_1, q_j) = 1$ (wäre dies > 1, folgte $p_1 = q_j$ ↯).
Aus ⊛ folgt nun: $p_1 \mid (q_1 \cdot q_1^{\beta_1 - 1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_\ell^{\beta_\ell}) = q_1 \tilde{n}$, wo $\tilde{n} := q_1^{\beta_1 - 1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_\ell^{\beta_\ell}$.
Bézout! → Aus dem Euklid-Lemma 2.13 und $(p_1, q_1) = 1$ folgt nun $p_1 \mid \tilde{n}$.
Dies lässt sich fortführen. Das führt schließlich zu $p_1 \mid q_\ell$, was wegen (p_1, q_ℓ) ausgeschlossen ist. □

2.19. Hinweis/Vereinbarung: Wird im Folgenden $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ oder $n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{e_p}$ geschrieben, so ist stets die eindeutige PFZ im Sinne von 2.14 gemeint. Die Abhängigkeit der p_j bzw. r und $e_1, \dots, e_r$ bzw. e_p von n wird nicht mehr explizit genannt.

2.20. **Bem.:** Für $n, d \in \mathbb{N}$ mit $n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p}$ und $d = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{b_p}$ gilt: $d \mid n \Leftrightarrow \forall p: b_p \leq a_p$.

Bew.: „$\Leftarrow$": ✓

„$\Rightarrow$": Es gelte $d \mid n$ und $b_p > a_p$ für (mindestens) ein $p \in \mathbb{P}$.

Seien $m := \frac{n}{d}$ und $c := \frac{d}{p^{b_p}}$, mit $m, c \in \mathbb{N}$.

Damit folgt $n = md = mcp^{b_p}$, und somit $np^{-a_p} = cp^{b_p - a_p} m$.

Auf der l.S. steht eine nat. Zahl, in deren PFZ p nicht vorkommt, während p auf der r.S. mit einem Exponenten von mindestens $b_p - a_p > 0$ auftritt.

Dies widerspricht dem Satz von der eind. PFZ 2.14. □

2.21. **Kor.:** Es gilt: $\#\{d \in \mathbb{N};\ d \mid \prod_{j=1}^{k} p_j^{a_j}\} = \prod_{j=1}^{k} (a_j + 1)$.

Bsp.: $\#\{d \mid 7^2 \cdot 5^7 \cdot 11^{12}\} = 3 \cdot 8 \cdot 13$

2.22. **Kor.** (PFZen von ggT und kgV):

Seien $k \in \mathbb{N}$, $n_j = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_{p,j}}$ geg. für $j = 1, \dots, k$. Seien $A_p := \min\{a_{p_j};\ j \leq k\}$

und $B_p := \max\{a_{p_j};\ j \leq k\}$.

Dann gilt $(n_1, \dots, n_k) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{A_p}$ und $[n_1, \dots, n_k] = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{B_p}$.

Bew.: Zum ggT: Nach Bem. 2.20 ist $\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{A_p}$ für alle $j \leq k$ ein Teiler von n_j.

Ist $c := \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_{p,c}}$ nun ein gemeinsamer Teiler der $n_1, \dots, n_k$,

so ist $\alpha_{p,c} \leq a_{p,j}$ für alle $j \leq k$ und $p \in \mathbb{P}$.

Bem. 2.20 zeigt $c \mid \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{A_p}$, und mit Folgerung 1.14(1) folgt $(n_1, \dots, n_k) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{A_p}$.

Zum kgV: Nach Bem. 2.20 ist $\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{B_p}$ für alle $j \leq k$ ein Vielfaches von n_j.

Ist $m := \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_{p,m}}$ nun ein gemeinsames Vielfaches der $n_1, \dots, n_k$,

so ist $\alpha_{p,m} \geq a_{p,j}$ für alle $j \leq k$ und $p \in \mathbb{P}$.

Damit folgt $\alpha_{p,m} \geq B_p = \max\{a_{p_j};\ j \leq k\}$.

Dies zeigt $\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{B_p} \mid m$, und mit Bem. 1.20 b) folgt $[n_1, \dots, n_k] = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{B_p}$.

□

2.23. Bsp.: $(2^2 3^5 \cdot 7^2 \cdot 11,\ 3^2 \cdot 7^5 \cdot 11^2) = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$

$[2^2 3^5 \cdot 7^2 \cdot 11,\ 3^2 \cdot 7^5 \cdot 11^2] = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 7^5 \cdot 11^2$

2.24. Bem.: Der Satz von der eindeutigen PFZ besagt, dass jedes nicht-Null-Element des Ringes $\mathbb{Z}$ eindeutig als Produkt von unzerlegbaren ("irreduziblen") Elementen $p \in \mathbb{P}$ und einer Einheit $e \in \{1, -1\}$ geschrieben werden kann.
Die nächsteinfachen Bereiche sind die Ringe

$$\mathbb{Z}[\sqrt{a}] := \{b_1 + b_2\sqrt{a};\ b_1, b_2 \in \mathbb{Z}\} \text{ für } a \in \mathbb{Z} \setminus \{h^2;\ h \in \mathbb{Z}\}.$$

Hier können in naheliegender Weise Einheiten und Primelemente definiert werden.
Wie das Beispiel $6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5}) \cdot (1-\sqrt{-5})$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ zeigt, kann die Eigenschaft der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primfaktoren verloren gehen.
Diese Probleme bilden den Ausgangspunkt zur algebraischen Zahlentheorie.