Interpolation holomorpher Funktionen und Surjektivität Eulerscher partieller Differentialoperatoren

Michael Langenbruch (Oldenburg)

Abstract: Wir werden stetige lineare Operatoren M auf dem Raum $\mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$ aller reell analytischen Funktionen diskutieren, die alle Monome als Eigenvektoren haben, d.h. $M(\xi^\alpha)(x) = m_\alpha x^\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^d$ (sogenannte „Multiplikatoren"). Klassische Beispiele sind Eulersche partielle Differentialoperatoren endlicher oder unendlicher Ordnung $P(\theta) := \sum_\alpha c_\alpha \theta^\alpha$, wobei $\theta^\alpha := \prod_{j\leq d} \theta_j^{\alpha_j}$ für $\theta_j := x_j \partial/\partial x_j$. Wir betrachten also unter anderem partielle Differentialoperatoren mit polynomiellen Koeffizienten. Es zeigt sich, dass die Multiplikatorfolge $(m_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^d}$ als Momentenfolge eines eindeutig bestimmten analytischen Funktionals $T \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^d)'$ gegeben werden kann, d.h. dass $m_\alpha = \langle T, \xi^\alpha \rangle$ für alle α. Momentenfolgen können als Interpolationsfolgen bestimmter holomorpher Funktionen charakterisiert werden. Auf diese Weise lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen für die Surjektivität Eulerscher Differentialoperatoren $P(\theta)$ herleiten, die eng mit der Halbraum-Eigenschaft des Hauptteils P_m von P verknüpft ist, d.h. $P_m(z) \neq 0$ falls $\mathrm{Re}(z_j) > 0$ für alle $j \leq d$. Dies liefert eine Vielzahl von konkreten Beispielen surjektiver wie auch nicht surjektiver Operatoren.