Lösung + Wertung

Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel
Grünrock

SoSe 2018
26.09.2018

2. Klausur zu Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (ausser Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Die Funktion $f(x) = x^3e^{-x}$ auf $(0,\infty)$)	12 Punkte
A3 (Lückentext zum Begriff *Konvexität*)	8 Punkte
A4 (Integration)	10 Punkte
A5 (Partielle Ableitungen und Elastizitäten)	12 Punkte
A6 (Ein Polynom in zwei Variablen)	11 Punkte

Bei den Aufgaben 1, 2, 3 und 5 werden lediglich die (Teil-)Ergebnisse korrigiert. **Es empfiehlt sich also im besonderen Maße, Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden.** Die Klausur gilt mit 26 (von 63 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

1. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Besitzt f in $x_0 \in \mathbb{R}$ ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(b) Gilt für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, dass $f'(x_0) = 0$, so ist x_0 eine kritische Stelle von f.

Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(c) Gilt für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, dass $f'(x_0) = 0$, so nimmt f in x_0 ein lokales Extremum an.

Antwort: richtig ◯ falsch ⊗ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

Bsp.: $f(x) = x^3$ und $x_0 = 0$

(d) Gilt für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, dass $f'(x) < 0$ auf $(-\infty, x_0)$ und $f'(x) > 0$ auf (x_0, ∞), so nimmt f in x_0 ein globales Maximum an.

Antwort: richtig ◯ falsch ⊗ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

Bem.: "Globales Minimum" ist korrekt.

(e) Gilt in einer kritischen Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ von f, dass $f''(x_0) > 0$, so nimmt f in x_0 ein lokales Minimum an.

Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

2. **(2+1+2+1+2+4=12 P.)** Für $x > 0$ sei $f(x) = x^3 e^{-x}$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ und die Elastizität $\varepsilon_f(x)$. (Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse soweit wie möglich.)

$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-x} - x^3 e^{-x} = (3-x)x^2 \cdot e^{-x}$ 1P.

$\varepsilon_f(x) = \frac{x f'(x)}{f(x)} \underset{\text{hier}}{=} 3-x$ 1P.

(b) Nimmt f ein globales Maximum an? Wenn ja, wo?

f nimmt in $x_0 = 3$ ein globales Maximum an. 1P.

(Folgt aus (a), da $f'(x) > 0$ auf $(0,3)$ und $f'(x) < 0$ auf $(3,\infty)$)

(c) Bestimmen Sie das größte offene Teilintervall $I \subset (0,\infty)$, auf dem f streng monoton steigend und elastisch ist.

steigend auf $(0,3)$ nach (a), (b). Unter dieser Vor. ist "elastisch" gleichbedeutend mit $\varepsilon_f(x) > 1 \underset{\text{hier}}{\Leftrightarrow} 3-x > 1$
$\Leftrightarrow 0 < x < 2$. Also ist das gesuchte Intervall $I = (0,2)$ 2P.

(d) Berechnen Sie die zweite Ableitung $f''(x)$ (und vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit wie möglich).

$f''(x) = (6x - 3x^2 - 3x^2 + x^3)e^{-x}$ 1P

$= x(x^2 - 6x + 6)e^{-x}$

(e) Bestimmen Sie die Nullstellen von f'' und das größte abgeschlossene Intervall $K \subset (0,\infty)$, auf dem f konkav ist.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{3 \pm \sqrt{3}\}$ 1P.

$K = [3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}]$ 1P.

(f) Bestimmen Sie Intervalle $J_1, J_2, J_3, J_4 \subset (0,\infty)$, so dass $J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 = (0,\infty)$ und so dass gilt

(i) auf J_1 ist f progressiv steigend, $J_1 = (0, 3-\sqrt{3}]$ 1P.

(ii) auf J_2 ist f degressiv steigend, $J_2 = [3-\sqrt{3}, 3]$ 1P.

(iii) auf J_3 ist f progressiv fallend, $J_3 = [3, 3+\sqrt{3}]$ 1P.

(vi) auf J_4 ist f degressiv fallend. $J_4 = [3+\sqrt{3}, \infty)$ 1P.

3. **(1+2+1+1+1+1+1=8 P.)** Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

f heißt *konvex*, wenn gilt

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ $\forall x, y \in I, \lambda \in [0,1]$.

Geometrisch bedeutet Konvexität, dass

alle Sekanten an den Graphen G_f oberhalb von G_f liegen.

Die Funktion f heißt *konkav*, wenn

$-f$ konvex ist .

Ist f zweimal stetig differenzierbar, so gilt: f ist konvex auf I, wenn

$f''(x) \geq 0$ $\forall$ $x \in I$.

Durch Kombination mit den Begriffen *monoton wachsend/fallend* werden weitere Begriffe gebildet. Z. B. heißt eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ *progressiv wachsend*, wenn sie

konvex und monoton wachsend ist.

Ist $f: I \to \mathbb{R}$ konvex und monoton fallend, so nennt man f

degressiv fallend,

ein Beispiel hierfür ist

$f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in I = (0, \infty)$.

Bem.: Zum letzten Punkt gibt es natürlich eine Vielzahl von Bspen. Etwa $f(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, auf $(0, \infty)$, $f(x) = e^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln(x) = \ln(\frac{1}{x})$, $x > 0$, etc.

4. **(3+3+4=10 P.)** Berechnen Sie

(a) die unbestimmten Integrale $\int e^{2x+3}dx$ und $\int 2x\sqrt{x^2+2}dx$,

(b) eine Funktion $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ mit der Elastizität $\varepsilon_f(x)=1+x$ und

(c) den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f:(0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto f(x):=\frac{1}{\sqrt{x}}$ und $g:(0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto g(x):=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ eingeschlossen wird.

(a) $\int e^{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+3}$ 1P.

$$\int \underbrace{2x}_{=\varphi'(x)}\,\underbrace{(x^2+2)}_{=:\varphi(x)}{}^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}(x^2+2)^{3/2}$$ 2P.

(b) Gefordert ist $1+x=\varepsilon_f(x)=x\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=1+\frac{1}{x}$ 1P.

Integration ergibt: $\ln(f(x)) = x+\ln(x)+C$ 2P.

exp(...) davon: $f(x)=C\cdot\exp(x+\ln(x)) = C\cdot x\cdot e^x$ 1P.

(mit einer Konstante $C>0$, nach der nicht gefragt ist.)

(c) Die gesuchte Fläche ist

$$A=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{3}}\,dx$$ 1P.

$$=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_0^1$$ 2P.

$$=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.$$ 1P.

5. **(4+4+4=12 P.)** Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung und die partiellen Elastizitäten der folgenden Funktionen $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty)$. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse!

(a) $f(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} \; ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \qquad 1+1 \text{ P.}$$

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = \frac{x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f(x,y)} = \frac{1}{2} \; ; \quad \varepsilon_{f,y}(x,y) = \frac{3}{2} \qquad 1+1 \text{ P.}$$

(b) $f(x,y) = e^{xy^2}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 \cdot e^{xy^2} \; ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy \cdot e^{xy^2} \qquad 1+1 \text{ P.}$$

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = xy^2 \; ; \quad \varepsilon_{f,y}(x,y) = 2xy^2 \qquad 1+1 \text{ P.}$$

(c) $f(x,y) = x^3 3^y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \cdot 3^y \; ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 \cdot \ln(3) \cdot 3^y \qquad 1+1 \text{ P.}$$

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = 3 \; ; \quad \varepsilon_{f,y}(x,y) = \ln(3) \cdot y \qquad 1+1 \text{ P.}$$

6. (2+2+2+2+3=11 P.) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit dem Gradienten

$$\nabla f(x, y) = (4x + y, x + 2y + 7).$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f.

(b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $\mathrm{Hess} f(x, y)$ und

(c) deren Determinante. Ist $\mathrm{Hess} f(x, y)$ definit? Wenn ja, in welcher Weise?

(d) Welche Folgerungen ergeben sich aus (a)-(c) bezüglich der Existenz lokaler Extrema von f?

(e) Bestimmen Sie f unter der zusätzlichen Bedingung $f(0, 0) = 1$.

(a) $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{matrix} 4x + y = 0 \\ \wedge\ x + 2y + 7 = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} y = -4x \\ \wedge\ x - 8x + 7 = 0 \end{matrix}$

$\iff \begin{matrix} y = -4x \\ \wedge\ -7x = -7 \end{matrix} \iff (x,y) = (1,-4)$

Also gibt es genau eine kritische Stelle von f, nämlich $(x_c, y_c) = (1, -4)$. (Wer weiß, was eine krit. Stelle ist, erhält bereits 1/2 P.) 2P.

(b) $\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 2P.

(c) $\det \mathrm{Hess} f(x,y) = 7$ 1P.

Da det und Spur positiv sind, ist $\mathrm{Hess} f(x,y)$ positiv definit. 1P.

(d) In (x_c, y_c) nimmt f ein (isoliertes) lokales Minimum an. 1P

Ein Maximum wird nicht angenommen. 1P.

zu 6, (e): Wir haben

$$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx \underset{hier}{=} \int 4x + y \,dx$$

$$= 2x^2 + xy + C_1(y) \qquad 1P.$$

und

$$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy \overset{hier}{=} \int x + 2y + 7\,dy$$

$$= xy + y^2 + 7y + C_2(x) \qquad 1P.$$

Um Übereinstimmung zu erzielen wählt man $C_1(y) = 7y$ und $C_2(x) = 2x^2 + C_0$ (C_0: absolute Konstante!), also

$$f(x,y) = 2x^2 + xy + y^2 + 7y + C_0,$$

die Zusatzbed. ist für $C_0 = 1$ erfüllt. 1P.