Lösung + Wertung

Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. DR. AXEL GRÜNROCK

SoSe 2017
18.09.2017

2. Klausur zu Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Extremwertaufgabe in einer Variablen)	8 Punkte
A3 (Wachstumseigenschaften einer Funktion)	14 Punkte
A4 (Integration)	11 Punkte
A5 (Richtungsableitung und Richtungselastizität)	9 Punkte
A6 (Hesse-Matrix und Integration)	11 Punkte

Bei den Aufgaben 1,2,3, und 5 werden lediglich die (Teil-)Ergebnisse korrigiert. **Es empfiehlt sich also im besonderen Maße, Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden.** Die Klausur gilt mit 26 (von 63 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und gilt $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, so nimmt f ihr Maximum und ihr Minimum an.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = e^{-x}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ degressiv fallend.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(c) Ist f zweimal stetig differenzierbar und streng konvex, so wechselt f höchstens einmal ihr Monotonieverhalten.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(d) Jede stetige Funktion ist differenzierbar.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(e) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(a) = f(b)$, so besitzt f' auf (a, b) (mindestens) eine Nullstelle.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. **(2+2+2+2=8 P.)** Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$f(x) = \frac{4x-3}{1+x^2}.$$

(a) Berechnen Sie $f'(x)$, und vereinfachen Sie Ihr Ergebnis.

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}\left(4(1+x^2) - (4x-3)\cdot 2x\right) \qquad 1P.$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)^2}\left(4 + 6x - 4x^2\right) \qquad 1P.$$

(b) Zeigen Sie, dass $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = 2$ kritische Stellen von f sind.

$$4 + 6x_1 - 4x_1^2 = 4 + 6\left(-\tfrac{1}{2}\right) - 4\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 = 4 - 3 - 1 = 0 \Rightarrow f'(x_1) = 0$$

$$4 + 6x_2 - 4x_2^2 = 4 + 6\cdot 2 - 4\cdot 2^2 = 4 + 12 - 16 = 0 \Rightarrow f'(x_2) = 0$$

(jeweils 1 P.)

(c) Gibt es weitere kritische Stellen von f? (Wenn ja: welche? Wenn nein: Warum nicht?)

1P.

Nein,

denn die quadratische Fkt. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4 + 6x - 4x^2$ hat höchstens zwei Nullstellen (und damit auch f', da $\frac{1}{(1+x^2)^2} > 0$) 1P.

(d) Bestimmen Sie $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ und $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$, und entscheiden Sie, ob es sich dabei um ein Maximum bzw. um ein Minimum handelt.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(2) = 1 \qquad 1P.$$

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -4 \qquad 1P.$$

3. **(4+3+2+1+3+1=14 P.)** Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = (x^2+1)e^x$.

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse.

$f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2+1) \cdot e^x$ 1P.

$= (x^2+2x+1) \cdot e^x$ 1P. $(= (x+1)^2 \cdot e^x)$

$f''(x) = (2x+2) \cdot e^x + (x^2+2x+1) e^x$ 1P.

$= (x^2+4x+3) \cdot e^x$ 1P. $(= (x+3)(x+1) \cdot e^x)$

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f' und f''.

$f'(x) = 0 \iff x = -1$ 1P.

$f''(x) = 0 \iff x \in \{-1, -3\}$ 2P. (für jede richtige Nullstelle 1P.)

(c) Begründen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ monoton wachsend ist.

$f'(x) = (x+1)^2 e^x \geq 0 \overset{1P}{\underset{\text{Monotoniesatz}}{\Longrightarrow}} f$ monoton wachsend

1P.

Wenn man nicht diese Darstellung hat, muss man natürlich begründen, dass $f'(x) \geq 0$ ist $\forall x \in \mathbb{R}$!

(d) Geben Sie die *Definition* des Begriffes "degressiv wachsend" für eine (nicht notwendig differenzierbare) Funktion $g: I \to \mathbb{R}$ an.

monoton wachsend

und konkav 1P.

(e) Welche Bedingungen an die Ableitungen g' und g'' einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion g sind hinreichend dafür, dass g auf einem Teilintervall I von $\mathbb{R}$ degressiv wachsend ist?

$g'(x) \geq 0$ 1P. und $g''(x) \leq 0$ 1P.

für alle $x \in I$ 1P.

(f) Ermitteln Sie das größte Teilintervall J von $\mathbb{R}$, auf dem f degressiv wachsend ist.

$[-3, -1]$ 1P.

(kein Abzug für offenes oder halboffenes Intervall)

4. **(2+3+2+4=11 P.)**

(a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x \exp(2x) dx$.

(b) Lösen Sie die Gleichung $3 \int_1^x \frac{dt}{t^2} = 2$ nach x auf.

(c) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_9^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$.

(d) Für $x \geq 0$ sei $f(x) = x^2$. Bestimmen Sie den Inhalt A der Fläche, die vom Graphen G_f, der Tangente an G_f im Punkt $(2,4)$ und der y-Achse eingeschlossen wird.

(a) part. Int. ergibt $\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\exp(2x)}_{g'} dx = x \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx$ 1P.

$= \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}) \cdot e^{2x}$ 1P.

(b) Es ist $\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}$ 1P.

also $\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x}$. 1P $\Rightarrow 3\int_1^x \frac{dt}{t} = 2 \Leftrightarrow x = 3$ 1P.

(c) $\int_9^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int_9^\infty x^{-3/2} dx = -2x^{-\frac{1}{2}} \Big|_9^\infty$ 1P.

$= 2 \cdot 9^{-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}} \left(= \frac{4}{6}\right) = \frac{2}{3}$ 1P.

(d) Tangentengleichung: $t(x) = ax + b$ mit $a = f'(2) = 4$ 1P.

Aus $4 = t(2) = 4 \cdot 2 + b$ folgt $b = -4$, also $t(x) = 4(x-1)$ 1P.

$A = \int_0^2 f(x) - t(x) dx$ 1P.

$= \int_0^2 x^2 - 4x + 4 dx = \int_0^2 (x-2)^2 dx = \frac{1}{3}(x-2)^3 \Big|_0^2 = -\frac{1}{3}(-2)^3$

$= \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$ 1P.

5. **(2+3+2+2=9 P.)** Gegeben sei die Funktion

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty), \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) := x^2y^3.$$

Berechnen Sie

(a) den Gradienten $\nabla f(x,y)$,

$\nabla f(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2)$ 2P.

(b) die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0,y_0)$ nach $\xi = \frac{1}{5}(4,3)$ im Punkt $(x_0,y_0) = (1,2)$,

$\nabla f(1,2) = (16, 12)$ 1P.

$\frac{\partial f}{\partial \xi}(1,2) = (16,12) \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}(64+36) = 20$ 1P.

1P.

(c) den Elastizitätsgradienten $\vec{\varepsilon}_f(x,y)$ und

$\vec{\varepsilon}_f(x,y) = (2,3)$ 2P.

(d) die Richtungselastizität $\varepsilon_{f,\xi}(x,y)$ für ξ wie in (b).

$\varepsilon_{f,\xi}(x,y) = \langle \vec{\varepsilon}_f(x,y), \xi \rangle$ 1P

$= \frac{1}{5} \cdot (2,3)\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \frac{17}{5}$ 1P.

6. **(4+3+1+3=11 P.)** Gegeben sei eine Funktion $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} - 2, \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 3\right). \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $\mathrm{Hess}f(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie deren Determinante und vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit wie möglich. Welche Folgerung ergibt sich für die Definitheit von $\mathrm{Hess}f(x,y)$?

(c) Was können Sie aus Ihrem Ergebnis zu (b) über die Existenz lokaler Extrema der Funktion f folgern?

(d) Bestimmen Sie eine Funktion f, für die (1) gilt.

(a) $\mathrm{Hess}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}y^{3/2} \ \ 1P. & \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \\ \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} & \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} \ \ 1P \end{pmatrix}$ 1P

+ 1P. für richtig einsortieren.

(b) $\det(\ldots) = -\frac{3}{16}x^{-1}y - \frac{9}{16}\cdot x^{-1}y$ 1P.

$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{y}{x}$ 1P.

1P.

Es folgt: $\mathrm{Hess}\, f(x,y)$ ist stets indefinit, (da die det immer negativ ist. Beachte: $n=2$!)

(c) Es gibt keine lokalen Extrema der Fkt. f ! 1P.

(d) $f(x,y) = \int \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{3/2} - 2\,dx = x^{\frac{1}{2}}y^{3/2} - 2x + C_1(y)$ 1P.

$f(x,y) = \int \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 3\,dy = x^{\frac{1}{2}}y^{3/2} - 3y + C_2(x)$ 1P.

Vergleich: $f(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{3/2} - 2x - 3y \ (+C)$ 1P.

nicht erforderlich