Inverse Matrizen und Determinanten

(In diesem Abschnitt betrachten wir nur quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

Def.: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt <u>invertierbar</u> oder <u>regulär</u>, wenn es $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt mit $BA = E_n$. In diesem Fall heißt B die zu A inverse Matrix und wird mit A^{-1} bezeichnet.

Bem. (1) Ist A regulär, so ist die Gleichung $Ax=b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar.

(2) Ist A regulär mit Inverser B, so gilt auch $AB = E_n$.

(3) Die Inverse einer regulären Matrix ist eindeutig bestimmt.

Begründung: (1) Ist $Ax=0$, und B invers zu A, so folgt $x = E_n x = BAx = B0 = 0$. Aus dem Satz über die Zeilen-Stufen-Form wissen wir: Besitzt die Gleichung $Ax=0$ nur die triviale Lösung $x=0$, so ist die Gleichung $Ax=b$ eindeutig lösbar für jedes $b \in \mathbb{R}^n$.

(2) A regulär $\Rightarrow$ $Ax=b$ eindeutig lösbar mit $x = BAx = Bb$. Also $b = Ax = ABb$. Gilt für jedes $b \in \mathbb{R}^n$, also $AB = E_n$.

(3) Es sei $BA = CA = E_n \underset{(2)}{\Longrightarrow} AB = AC \Rightarrow BAB = BAC$

$\Rightarrow B = C$ (weil $BA = E_n$).

Bsp. (1) Ist $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ eine Diagonalmatrix, so gilt: D ist regulär genau dann, wenn alle $d_i \neq 0$. In diesem Fall ist $D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}\right)$.

(2) Eine rechte obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist ebenfalls genau dann invertierbar, wenn alle Diagonalelemente $\lambda_i \neq 0$ sind. Ihre Inverse hat dann die Gestalt

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Entsprechendes gilt für linke untere Dreiecksmatrizen.

Begründung: $Rx = b$ ist für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar, falls $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$ ist. Für $b = e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ erhält man die Lösung $x^{(1)} = \left(\frac{1}{\lambda_1}, 0 \dots, 0\right)^T$, für $b = e_2 = (0, 1, 0, \dots 0)$: $x^{(2)} = \left(*, \frac{1}{\lambda_2}, 0, \dots, 0\right)^T$ etc. Bilden wir hieraus $X = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$, folgt

$RX = E_n$, also $X = R^{-1}$.

Rechenregeln für die Inverse:

(1) $A^{-1}A = E = AA^{-1}$ (4) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ $(\lambda \neq 0)$

(2) $(A^{-1})^{-1} = A$ (5) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (Reihenfolge kehrt sich um!)

Begründung: (1) Def. bzw. gerade gezeigt

(2) Aus $A^{-1}(A^{-1})^{-1} = E$ folgt durch Multiplikation mit A: $A = AE = AA^{-1}(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}$

(3) $E = A^{-1}A = B^{-1}B = B^{-1}EB = B^{-1}A^{-1}AB$

Andererseits $E = (AB)^{-1}AB$. Aus der Eindeutigkeit der Inversen folgt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(4) $(\lambda A)^{-1} = ((\lambda E)\cdot A)^{-1} \underset{(3)}{=} A^{-1}(\lambda E)^{-1} = A^{-1}(\frac{1}{\lambda}E)$

$= (\frac{1}{\lambda}E)A^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

(5) $A^{-1}A = E \Rightarrow (A^{-1}A)^T = E^T = E \Rightarrow A^T(A^{-1})^T = E$

$\Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

$\cdot (A^T)^{-1}$

<u>Def.</u> (negative Potenzen regulärer Matrizen): Für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $k \in \mathbb{N}$ setzt man $A^{-k} := (A^{-1})^k$. Dann ist A^ℓ für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ definiert. Wie üblich gelten dann

- $A^kA^\ell = A^{k+\ell}$ und • $(A^k)^\ell = A^{k\ell}$

(hier: $k, \ell \in \mathbb{Z}$).

Der folgende Satz stellt einige Eigenschaften von $n\times n$-Matrizen zusammen, die zur Regularität bzw. Invertierbarkeit äquivalent sind:

<u>Satz</u>: Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind äquivalent:

(a) A ist regulär;

(b) die Gleichung $Ax=0$ besitzt nur die triviale Lösung;

(c) die Gleichung $Ax=b$ besitzt für jede rechte Seite genau eine Lösung;

(d) die Zeilen-Stufen-Form von A ist eine rechte obere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen $\lambda_i \neq 0$;

(e) die durch A definierte lineare Abbildung

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto F(x) := Ax$$

ist bijektiv mit $F^{-1}(y) = A^{-1}y$.

Teil (d) des Satzes ergibt, dass der Gauss-Algorithmus ein elementares Verfahren liefert um festzustellen, ob eine Matrix A regulär ist oder nicht: Wenn wir A durch Zeilenoperationen auf Dreiecksgestalt bringen können, so dass alle Diagonalelemente von Null verschieden sind, so ist A regulär. Anders ausgedrückt:

Kriterium: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann regulär, wenn es Elementarmatrizen $B_1, \dots, B_N$ und eine rechte obere Dreiecksmatrix R mit nichtverschwindenden Diagonalelementen gibt, so daß (2.41)

$$B_N \cdots B_1 \cdot A = R.$$

Dies können wir weiterentwickeln zu einem Verfahren zur Berechnung der Inversen einer regulären Matrix A. Dazu invertieren wir zunächst eine reguläre rechte obere Dreiecksmatrix, indem wir sie durch Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix umwandeln und simultan dieselben Umformungen an der Einheitsmatrix durchführen:

$$\cancel{B_1}\,(R, E) \xrightarrow[\cdot B_1]{} (B_1 R, B_1 E) \xrightarrow[\cdot B_2]{} (B_2 B_1 R, B_2 B_1 E) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow[B_N]{} (B_N \cdots B_1 R, B_N \cdots B_1),$$

und zwar so lange, bis $B_N \cdot \ldots \cdot B_1 \cdot R = E$ erreicht ist. Dann ist die aus E entstandene Matrix $B_N \cdots B_1$ gerade die Inverse von R, also

$$R^{-1} = B_N \cdot \ldots \cdot B_1$$

Dies soll exemplarisch an einer regulären 3×3-Matrix durchgeführt werden: (2.42)

$$R\,|\,E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(3) \longrightarrow \frac{1}{r_{33}} \cdot (3)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{r_{33}} \end{array}\right)$$

Als nächstes sollen in der 3. Spalte von R oberhalb der Diagonalen Nullen erzeugt werden. Dies erreichen wir durch

$$(1) \longrightarrow (1) - r_{13} \cdot (3) \quad \text{und} \quad (2) \longrightarrow (2) - r_{23} \cdot (3)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} r_{11} & r_{12} & 0 & 1 & 0 & -\frac{r_{13}}{r_{33}} \\ 0 & r_{22} & 0 & 0 & 1 & -\frac{r_{23}}{r_{33}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{r_{33}} \end{array}\right)$$

Normierung: $(2) \longrightarrow \frac{1}{r_{22}} \cdot (2)$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} r_{11} & r_{12} & 0 & 1 & 0 & -\frac{r_{13}}{r_{33}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{r_{22}} & -\frac{r_{23}}{r_{22}\,r_{33}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{r_{33}} \end{array}\right)$$

Weiter mit (1) $\rightarrow$ (1) $- r_{12} \cdot$ (2)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} r_{11} & 0 & 0 & 1 & -\frac{r_{12}}{r_{22}} & \frac{r_{12} r_{23}}{r_{22} r_{33}} - \frac{r_{13}}{r_{33}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{r_{22}} & -\frac{r_{23}}{r_{22} r_{33}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{r_{33}} \end{array}\right)$$

und im letzten Schritt (1) $\rightarrow \frac{1}{r_{11}} \cdot$ (1)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{r_{11}} & -\frac{r_{12}}{r_{11} r_{22}} & \frac{r_{12} r_{23}}{r_{11} r_{22} r_{33}} - \frac{r_{13}}{r_{11} r_{33}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{r_{22}} & -\frac{r_{23}}{r_{22} r_{33}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{r_{33}} \end{array}\right)$$

mit dem Ergebnis, daß

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_{11}} & -\frac{r_{12}}{r_{11} r_{22}} & \frac{r_{12} r_{23}}{r_{11} r_{22} r_{33}} - \frac{r_{13}}{r_{11} r_{33}} \\ 0 & \frac{1}{r_{22}} & -\frac{r_{23}}{r_{22} r_{33}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_{33}} \end{pmatrix}$$

Nun können wir beide Operationen hintereinander durchführen, und so eine beliebige reguläre Matrix A invertieren. Schematisch:

$$\begin{array}{ccc} A & \text{Zeilenumformungen simultan ausführen. Entspricht der Multiplikation mit } B_N \ldots B_1 & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & & B_N \ldots B_1 \\ \downarrow & \text{weitere simultane Zeilenoperationen } \hat{=}\ B_M \ldots B_{N+1} & \downarrow \\ E & & B_M \ldots B_{N+1} B_N \ldots B_1 = A^{-1} \end{array}$$

Dies soll ebenfalls anhand eines konkreten Beispiels näher erläutert werden: (2.44)

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = ?$

Für die simultanen Zeilenumformungen schreibt man A und E nebeneinander:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$(1) \leftrightarrow (2)$ $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$(3) \to (3) - (1)$ $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$(3) \to (3) + (2)$ $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$(3) \to -(3)$ $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Soweit der eigentliche Gauss-Algorithmus. Der

aus der beliebigen Matrix A eine Dreiecksmatrix her- 2.45
stellt. Hier haben wir sogar bereits Einsen auf die Diagonalen erzeugt. Nun wird im zweiten Teil die Dreiecksmatrix in die Einheitsmatrix umgewandelt

(1) $\rightarrow$ (1) + (3), (2) $\rightarrow$ (2) + 4 · (3) ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

(1) $\rightarrow$ (1) − 2 · (2) :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -6 & +7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Also: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Determinanten: Einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soll eine reelle Zahl det A, ihre Determinante, zugeordnet werden, so daß gilt

$$A \text{ ist regulär} \iff \det A \neq 0,$$

so daß man also an det A ablesen kann, ob A invertierbar ist oder nicht. Ferner wird mit der Determinante ein Hilfsmittel zur Lösung linearer Gleichungssysteme zur Verfügung gestellt.

Vorbereitungen:

Def. Eine Permutation der Zahlen $1, \dots, n$ ist eine endliche Folge $(i_1, \dots, i_n)$, in der alle Zahlen $1, \dots, n$ genau einmal vorkommen.

Bsp. (a) Es gibt genau 2 Permutationen der Zahlen 1 und 2, nämlich $(1,2)$ und $(2,1)$.

(b) Es gibt genau $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ Permutationen der Zahlen 1, 2 und 3. Diese sind

$$\begin{array}{ccc} (1,2,3) & (2,3,1) & (3,1,2) \\ (1,3,2) & (3,2,1) & (2,1,3) \end{array}$$

Bem.: Es gibt genau $n! \; (= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1)$ Permutationen der Zahlen $1, \dots, n$. Für $n = 4$ sind das $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, für $n = 5$ $5! = 120$ und für $n = 6$ bereits $6! = 720$. Die Zahl $n!$ der Permutation wächst also sehr schnell an.

Def.: Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man das Vorzeichen oder Signum durch

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Für eine Permutation $(i_1, \dots, i_n)$ von $1, \dots, n$ setzt man

$$\operatorname{sign}(i_1, \dots, i_n) := \prod_{1 \le r < s \le n} \operatorname{sign}(i_s - i_r) \quad (\in \{\pm 1\}!).$$

Bsp.: (a) $\operatorname{sign}(1,2) = \operatorname{sign}(2-1) = 1$

$\operatorname{sign}(2,1) = \operatorname{sign}(1-2) = -1$

(b) $\operatorname{sign}(1,2,3) = \operatorname{sign}(2-1)\operatorname{sign}(3-2)\operatorname{sign}(3-1) = 1$

und ebenso $\operatorname{sign}(2,3,1) = \operatorname{sign}(3,1,2) = 1$,

während $\operatorname{sign}(1,3,2) = \operatorname{sign}(3-1)\operatorname{sign}(2-3)\operatorname{sign}(2-1) = -1$,

ebenso $\operatorname{sign}(3,2,1) = \operatorname{sign}(2,1,3) = -1$.

Bem.: Von den $n!$ Permutationen der Zahlen $1, \dots, n$ hat die Hälfte positives Vorzeichen. Diese nennt man die <u>geraden</u> Permutationen. Die andere Hälfte hat das Vorzeichen -1, diese nennt man <u>ungerade</u>.

Def.: Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt die Zahl

$$\det A := \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \operatorname{sign}(i_1,\dots,i_n)\, a_{i_1 1}\, a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

die <u>Determinante</u> von A. Dabei erstreckt sich die Summe über alle $n!$ Permutationen $(i_1,\dots,i_n)$ von $1,\dots,n$.

Bez.: $\det A = \det(A) = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Bem. (i) Bei jedem der Produkte $a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n}$ wird aus jeder Spalte und jeder Zeile von A genau ein Eintrag ausgewählt.

(ii) Es gilt $\det A^T = \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \operatorname{sign}(i_1,\dots,i_n)\, a_{1 i_1} \cdots a_{n i_n}$

$$= \sum_{(j_1,\dots,j_n)} \operatorname{sign}(j_1,\dots,j_n)\, a_{j_1 1} \cdots a_{j_n n} = \det A$$

(Wähle $(j_1,\dots,j_n)$ als inverse Permutation zu $(i_1,\dots,i_n)$!)

(iii) Für eine rechte obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{ist } \det R = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Dies gilt insbesondere auch für Diagonalmatrizen, speziell ist $\det E = 1$.

Begründung: Für jede Permutation $(i_1, \dots, i_n) \neq (1, \dots, n)$ gibt es mindestens einen Index $k \in \{1, \dots, n\}$, für den $i_k > k$ und damit $a_{i_k k} = 0$ ist (aufgrund der Dreiecksgestalt von R). Der Beitrag von $(i_1, \dots, i_n)$ zur definierenden Summe ist also Null.

(iv) Für linke untere Dreiecksmatrizen

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{gilt ebenfalls } \det L = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Dies folgt aus (ii) und (iii).

Bsp.: (a) $n = 2$. Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ haben wir genau zwei Beiträge, den von

$$(1,2) \rightsquigarrow a_{11} a_{22} \quad \text{(mit positivem VZ)}$$

und den von

$$(2,1) \rightsquigarrow a_{21} a_{12} \quad \text{(mit negativem VZ).}$$

Also $\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ bzw.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc ,$$

in Übereinstimmung mit der früher angegebenen Definition der Determinante für 2×2-Matrizen.

(b) $n=3$, also $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Hier erhalten wir drei 2.50

Beiträge mit positivem Vorzeichen von den geraden Permutationen

$(1,2,3) \rightsquigarrow a_{11}a_{22}a_{33}$

$(2,3,1) \rightsquigarrow a_{21}a_{32}a_{13}$

$(3,1,2) \rightsquigarrow a_{31}a_{12}a_{23}$

und drei Summanden mit negativem Vorzeichen von den ungeraden Permutationen, nämlich

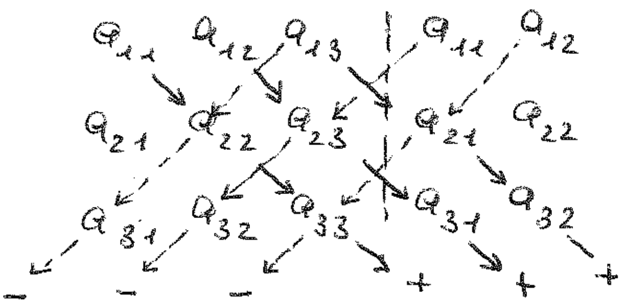
$(1,3,2) \rightsquigarrow a_{11}a_{32}a_{23}$

$(3,2,1) \rightsquigarrow a_{31}a_{22}a_{13}$

$(2,1,3) \rightsquigarrow a_{21}a_{12}a_{33}$

Dies ergibt:
$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Zum selben Ergebnis führt die sogenannte "Sarrus-Regel":



Sie besagt: Addiere die Produkte über die Diagonalen von links oben nach rechts unten ↘, subtrahiere davon die Summe über die Produkte der Diagonalen von rechts oben nach links unten ↙.

Vorsicht: Diese Regel gilt <u>nur</u> für $n=3$.

Bisher haben wir Determinanten lediglich unter Verwendung der Definition berechnet. Die folgenden

<u>Rechenregeln für Determinanten</u>

erleichtern in vielen Fällen diese Aufgabe. Dazu seien $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Spalten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ sowie $b \in \mathbb{R}^n$.

Dann gelten:

(a) $\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$

(bei Vertauschung zweier Spalten der Matrix ändert sich die Determinante um den Faktor -1);

(b) $\det(a_1, \dots, \lambda a_j, \dots, a_n) = \lambda \det(a_1, \dots, a_n)$;

(c) $\det(a_1, \dots, a_j + b, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_n)$

$$+ \det(a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

((b) und (c): die Determinante ist linear in jeder Spalte);

(d) $\det A^T = \det A$ ($\Rightarrow$ det ist linear in jeder Zeile);

(e) $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$ (Determinantenmultiplikationssatz).

Folgerungen:

(i) $\det(a_1,\dots,a_n) = 0$, falls $i \neq j$ existieren mit $a_i = \lambda a_j$ (Konsequenz aus (a) und (b)),

(ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ (aus (b)),

(iii) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, insbesondere ist $\det(A) \neq 0$, falls A regulär ist (dies folgt aus (e)).

(iv) $\det(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n) = \det(a_1,\dots,a_i+\lambda a_j,\dots,a_j,\dots,a_n)$ (aus (c) und (i).

Aus Regel (d) folgt ferner, dass alle Aussagen über die Spalten einer Matrix ebenso für deren Zeilen gelten.

Die Folgerung (iv) kann man sich sehr gut zur Determinantenberechnung zunutze machen, indem man die Matrix auf Dreiecksgestalt bringt, ohne die Determinante zu ändern. Dann kann man die Determinante ablesen.

Bsp.:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \underset{\substack{2-4\cdot 1 \\ 3-7\cdot 1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \underset{3-2\cdot 2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Der Aufwand bei Verwendung der Sarrus-Regel ist deutlich größer!

Ein weiteres Hilfsmittel zur Berechnung von Determinanten ist der

Entwicklungssatz von Laplace: Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht. Dann gelten

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det (A_{ij})$$

(Entwicklung nach der i-ten Zeile) und

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det (A_{ij})$$

(Entwicklung nach der j-ten Spalte).

Bsp. Mit Hilfe des Entwicklungssatzes soll $\det A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1^{+} & 0^{-} & 2^{+} & -1^{-} \\ 3^{-} & -2^{+} & 0^{-} & 2^{+} \\ 1^{+} & 2^{-} & -1^{+} & 0^{-} \\ 3^{-} & 0^{+} & 2^{-} & -2^{+} \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Wir entwickeln nach der 2. Spalte, weil diese zwei Nullen enthält. Für die VZ-Wahl ist ein "+/- - Schachbrettmuster" hilfreich (s.o.).

$$\det A = (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Nun kann man für die verbleibenden Unterdeterminanten z.B. die Sarrus-Regel benutzen oder auch weiter entwickeln. Das Ergebnis ist $\det A = -30$.
(Die Einzelheiten der Rechnung auszuführen sei als Übungsaufgabe gestellt.)

Wir haben bereits gesehen, daß $\det A \neq 0$ ist für reguläres A. Auch die Umkehrung trifft zu, insofern gilt das folgende scharfe Kriterium für die Invertierbarkeit einer $n\times n$-Matrix:

Satz: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$ ist.

Wie man Determinanten zur Lösung linearer Gleichungssysteme verwenden kann, ist Gegenstand des folgenden Satzes:

Cramer'sche Regel: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $b \in \mathbb{R}^n$. Mit $\tilde{A}_j$ sei diejenige Matrix bezeichnet, die entsteht, wenn die j-te Spalte von A durch b ersetzt wird. Dann ist die Lösung $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ von $Ax = b$ gegeben durch

$$x_j = \frac{\det \tilde{A}_j}{\det A}.$$

(Nachteil dieser Regel: Für große Matrizen zu hoher Rechenaufwand!)

Wendet man diese Formel mit $b = e_k$ (kanonische Basisvektoren) an, ergibt sich auch eine Formel zur Berechnung der Inversen einer regulären Matrix. Für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{hat man} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(Auch hier ist für große n der Rechenaufwand zu groß.)