2.4 Das Rechnen mit Matrizen

Die Gesamtheit aller Matrizen mit m Zeilen und n Spalten bezeichnen wir als $\mathbb{R}^{m\times n}$, kurz

$$\mathbb{R}^{m\times n} := \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ für } i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\} \right\}$$

Zur Abkürzung schreiben wir $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ oder, falls sich die Zeilenanzahl m und die Spaltenanzahl n aus dem Zusammenhang ergeben, $A = (a_{ij})$. Matrizen mit $m = n$ bezeichnen wir als <u>quadratisch</u>.

Ganz entsprechend zu den Operationen für Vektoren im $\mathbb{R}^n$ definieren wir eine Addition von Matrizen sowie deren Multiplikation mit einem Skalar komponentenweise: Seien

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \text{sowie } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dann definieren wir

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

und

$$\lambda A := (\lambda a_{ij}) := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} .$$

Hierdurch erhält der $\mathbb{R}^{m\times n}$ (ebenso wie zuvor der $\mathbb{R}^n$) eine Vektorraumstruktur, d.h. es gelten die Axiome (bzw. Rechenregeln) (V1) – (V8), zur Erinnerung:

(V1) $A+B = B+A$ (V2) $A+(B+C) = (A+B)+C$

(V3) Es existiert $0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, so daß für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt $A + 0 = A$ ($0 =$ "Nullmatrix")

(V4) Zu jedem $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert ein negatives Element $-A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, so daß $A + (-A) = 0$. (Für $A = (a_{ij})$ ist $-A = (-a_{ij})$, also $-A = (-1)\cdot A$.)

(V1) – (V4): $(\mathbb{R}^{m\times n}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(V5) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ (V6) $1\cdot A = A$ $(1 \in \mathbb{R})$

und schließlich gelten die Distributivgesetze

(V7) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ (V8) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

Hierbei sind $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ beliebige $m\times n$-Matrizen und λ, μ beliebige reelle Zahlen.

Der $\mathbb{R}^{m\times n}$ ist eine Verallgemeinerung von $\mathbb{R}^m$, denn

$$\mathbb{R}^{m\times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} : a_{i1} \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^m$$

(Spaltenvektoren). Hingegen ist

$$\mathbb{R}^{1\times n} = \{ (a_{11}, \ldots, a_{1n}) : a_{1j} \in \mathbb{R} \} = \{ a^T : a \in \mathbb{R}^n \}$$

der $\mathbb{R}^n$ als Zeilenvektoren aufgefaßt.

Bis hierher ist aber nicht wirklich etwas gewonnen. Als Vektorraum ist der $\mathbb{R}^{m\times n}$ lediglich eine andere Darstellung des $\mathbb{R}^{mn}$, nur die Komponenten sind anders angeordnet. Diese Anordnung erlaubt jedoch eine zusätzliche Rechenoperation, die Matrizenmultiplikation:

Def.: Zu $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le l}}$ $\in \mathbb{R}^{n\times l}$ definiert man das Produkt

$$AB := (c_{ik})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le k\le l}} \in \mathbb{R}^{m\times l} \quad \text{durch}$$

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk}.$$

Bem.: (1) Die Komponente c_{ik} des Produkts $A \cdot B$ erhält man also, indem man das Skalarprodukt aus der i-ten Zeile von A mit der k-ten Spalte von B berechnet.

(2) Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{k \times l}$, so ist die Bildung des Produkts AB nur möglich, wenn $n = k$ ist, d.h. wenn die Anzahl der Spalten von A übereinstimmt mit der Anzahl der Zeilen von B. Das Ergebnis ist in diesem Fall eine $m \times l$-Matrix.

Bsp. 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

$A \cdot B$ ist in diesem Fall definiert und eine 2×3-Matrix, also

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

mit $c_{11} = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 = 5$, $c_{12} = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 = 7$, $c_{13} = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 = 8$

$c_{21} = 3\cdot 1 + 4\cdot 2 = 11$, $c_{22} = 3\cdot 1 + 4\cdot 3 = 15$, $c_{23} = 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 18$.

Das Ergebnis ist also hier:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 11 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Das Produkt BA ist hingegen nicht definiert, da die Zahl der Spalten von B (3) nicht mit der Zahl der Zeilen von A (2) übereinstimmt.

Auch wenn beide Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ existieren, wird sich ihr Format im allg. unterscheiden:

Bsp. 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad BA = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Daß AB und BA beide definiert sind und darüber hinaus dasselbe Format haben gilt nur, wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gelten. Aber auch dann ist i. allg. $AB \neq BA$.

Bsp. 3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also: $AB \neq BA$. Das Beispiel zeigt aber auch, daß die Multiplikation von Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $n \geq 2$ nicht "nullteilerfrei" ist. Darunter versteht man, daß aus $a \cdot b = 0$ folgt, daß $a = 0$ oder $b = 0$ ist, wie wir es von den reellen Zahlen gewohnt sind. Die obigen Matrizen A und B sind hingegen beide von Null verschieden, dennoch ist ihr Produkt die Nullmatrix.

Wir stellen einige <u>Rechenregeln</u> für die Multiplikation, Addition und skalare Multiplikation von Matrizen zusammen (ohne Beweis):

$$\left.\begin{aligned}(A+\tilde{A})B &= AB+\tilde{A}B\\ A(B+\tilde{B}) &= AB+A\tilde{B}\end{aligned}\right\}$$ Distributivgesetze; da die Multiplikation hier nicht kommutativ ist, handelt es sich um verschiedene Aussagen!

$$A(BC) = (AB)C$$ Assoziativgesetz der Multiplikation

$$A(\lambda B) = \lambda(AB) = (\lambda A)B$$

Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $E_m = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und

$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (sog. Einheitsmatrizen),

so gilt $A = E_m A = A E_n$.

<u>Def.</u> (transponierte Matrix): Zu $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

heißt $A^T := (a_{ji})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die transponierte Matrix von A.

Hierfür gelten: $(A^T)^T = A$ und $(AB)^T = B^T A^T$.

Für quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind ferner die Potenzen $A^0 := E_n$, $A^1 := A$, $A^2 := A \cdot A$ usw., allgemein

$$A^{N+1} := A \cdot A^N$$

definiert. Hierfür gelten

$$A^{k+l} = A^k A^l \qquad A^{k\cdot l} = (A^k)^l .$$

Es sollen noch einige etwas allgemeinere Beispiele notiert werden:

<u>Bsp.</u> 4: Das "dyadische Produkt" AB aus einem Spaltenvektor $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ und einem Zeilenvektor $B = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Hierfür ist

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1, \dots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_m b_1 & \dots & & a_m b_n \end{pmatrix},$$

was auch für $n \neq m$ definiert ist und nicht mit dem Skalarprodukt verwechselt werden darf.

<u>Bsp.</u> 5: Multiplikation mit einer Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} =: \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, so ist das Produkt AD definiert und wir erhalten $AD \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit

$$AD = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & \cdots & a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1 & & \vdots & \\ \vdots & & & \\ a_{m1}d_1 & a_{m2}d_2 & \cdots & a_{mn}d_n \end{pmatrix}$$

$$= (d_1 a_1, \dots, d_n a_n),$$

wenn wir mit $a_1, \dots, a_n$ die Spalten von A bezeichnen.

Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_m \end{pmatrix} = \underbrace{\operatorname{diag}(d_1, \dots, d_m)}_{\in \mathbb{R}^{m \times m}}$,

so ist im allgemeinen das Produkt nur in anderer Reihenfolge zu bilden und wir erhalten $DA \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$DA = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \cdots & d_1 a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_m a_{m1} & \cdots & & d_m a_{mn} \end{pmatrix}$$

In diesem Fall werden also die Zeilen von A mit den Diagonalelementen von D multipliziert.

Bsp. 6: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, also $B = b \in \mathbb{R}^n$ mit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Hier geht die Matrizenmultiplikation in die Matrix-Vektor-multiplikation (letzter Abschnitt) über, denn

$$Ab = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots & a_{1n}b_n \\ \vdots & \\ a_{m1}b_1 + \dots & a_{mn}b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$