2.3 Der Gauss-Algorithmus

Als "Gauss'sches Eliminationsverfahren" oder "Gauss-Algorithmus" bezeichnen wir ein Verfahren zur systematischen Bestimmung aller Lösungen von (LGS) durch eine Reihe von zulässigen Zeilenumformungen. (= "Zeilenoperationen").

Def.: Zeilenoperationen sind die folgenden Operationen, die eine $m \times n$-Matrix wieder in eine $m \times n$-Matrix überführen:

(1) Zeilenvertauschung; entspricht im ausgeschriebenen System der Vertauschung von zwei Gleichungen (symbolisch: $(i) \longleftrightarrow (j)$);

(2) Multiplikation einer Zeile (bzw. Gleichung) mit einer reellen Zahl $\lambda \neq 0$ (symbolisch: $(i) \longrightarrow \lambda (i)$);

(3) Addition zweier Zeilen (bzw. Gln.), (symbolisch: $(i) \longrightarrow (i) + (j)$).

Häufig verwendet wird die Kombination $(i) \rightarrow (i) + \lambda (j)$ aus (2) und (3): Zur i-ten Zeile wird das λ-fache der j-ten Zeile hinzuaddiert.

Für solche Zeilenoperationen gilt der folgende

<u>Satz</u>: Zeilenoperationen an der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ eines linearen Gleichungssystems $Ax=b$ führen auf die erweiterte Koeffizientenmatrix eines äquivalenten Systems.

Die folgenden Beispiele illustrieren, wie man sich diesen Sachverhalt zunutze machen kann:

<u>Bsp.</u> 1: Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ -x + z &= 2 \qquad (*) \\ -x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen $(2) \to (2) + (1)$, $(3) \to (3) + (1)$ und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \end{array}\right),$$

wodurch wir in der ersten Spalte Nullen unterhalb der Diagonalen erzeugt haben.

Weiter ersetzen wir ③ → ③ − 3②:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right),$$

was dem folgenden System in Dreiecksgestalt entspricht

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 2y + z &= 2 \\ -3z &= 0, \end{aligned}$$

welches "von unten" leicht zu lösen ist. Wir erhalten:
$z = 0,\ y = 1,\ x = -2.$

Ergebnis: Das GLS. (*) wird eindeutig gelöst durch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Das dargestellte Schema führt ebenfalls zum Erfolg, wenn keine Lösung existiert, oder wenn es unendlich viele Lösungen gibt.

<u>Bsp.</u> 2: Wir betrachten gleich die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & a \end{array}\right),$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

Wir führen die folgenden Zeilenoperationen durch:

② → 2·② + ①, ③ → 2③ − ①

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & +1 & 0 & 2a \end{array}\right).$$

Schließlich ergibt ③ → ③ − ②

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2(a-1) \end{array}\right)$$

Nun sind zwei Fälle in Abhängigkeit vom Parameter a zu unterscheiden:

(i) $a \neq 1$: keine Lösung, denn die letzte Zeile ergibt $0 = 2(a-1)$.

(ii) $a = 1$. Die dritte Zeile ist stets erfüllt, die zweite lautet $y = 2$. Einsetzen in die 1. gibt

$2x + 4z = 2$, also $x = 1 - 2z$.

Die allgemeine Lösung ist also

$(1-2z, 2, z)^T$, $z \in \mathbb{R}$.

Was liefert diese Vorgehensweise im allgemeinen Fall?

<u>Satz</u>: Es sei A eine $m \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann kann die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$ des linearen GLS. $Ax = b$ durch Zeilenoperationen auf die folgende <u>Zeilen-Stufenform</u> gebracht werden:

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
\overbrace{0\ \cdots\ 0}^{k_0} & c_1 & \overbrace{*\ \cdots\ *}^{k_1} & \cdots & & & & & d_1\\
0 & \cdots & & 0 & c_2 & \overbrace{*\ \cdots\ *}^{k_2} & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & \cdots\ 0 & c_3 & *\ \cdots & & \vdots\\
 & & & & & \ddots & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & \cdots\ 0 & c_\ell & \overbrace{*\ \cdots\ *}^{k_\ell} & d_\ell\\
0 & \cdots & & & & & & \cdots\ 0 & d_{\ell+1}\\
\vdots & & & & & & & \vdots & \vdots\\
0 & \cdots & & & & & & \cdots\ 0 & d_m
\end{array}\right)
$$

n Spalten

Dabei sind

- $c_1, \dots, c_\ell \neq 0$, • $k_0 + k_1 + \dots + k_\ell + \ell = n$, • $k_0, \dots, k_\ell \geq 0$,

und die Anzahlen $\ell, k_0, \dots, k_\ell$ hängen nur von der Ausgangsmatrix A ab und nicht von den Zeilenoperationen.

Was kann man anhand der Zeilen-Stufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ über die Lösbarkeit des System $Ax=b$ aussagen?

1. Ist $\ell < m$ und existiert ein $j \in \{\ell+1, \dots, m\}$ mit $d_j \neq 0$, so existiert keine Lösung

2. Ist $\ell = m$ oder $\ell < m$ und $d_j = 0$ für $j \in \{\ell+1, \dots, m\}$ so besitzt $Ax=b$ mindestens eine Lösung

   2.1 Falls zusätzlich $\ell = n$ ist, ist $Ax=b$ eindeutig lösbar,

   2.2 falls zusätzlich $\ell < n$ ist, existieren unendlich viele Lösungen.

Die Lösbarkeit von $Ax=b$ wird also im wesentlichen bestimmt durch die Anzahl ℓ der Stufen in der Zeilen-Stufenform von $(A|b)$. Man nennt ℓ auch

- den Zeilenrang von A oder
- die Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen in $Ax=b$

(Später genaueres zum Begriff der linearen Unabhängigkeit.)

Auflösung eines LGS in Zeilenstufenform "von unten":

(falls $l = m$ oder $d_{l+1} = \ldots = d_m = 0$): (2.28)

- Die letzten k_l Variablen $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k_l+1}$ können beliebig gewählt werden (um die Gesamtheit aller Lösungen zu bestimmen, verwende man Parameter, die für beliebige reelle Zahlen stehen),

- Bestimme x_{n-k_l} aus der Gleichung

$$c_l x_{n-k_l} + \underbrace{* \cdot x_{n-k_l+1} + * \cdot x_{n-k_l+2} + \ldots + * x_n}_{\text{durch Wahl bekannt}} = d_l$$

- Die nächsten k_{l-1} Variablen $x_{n-k_l-1}, \ldots, x_{n-k_l-k_{l-1}+1}$ können wieder frei gewählt werden.

- Es folgt

$$c_{l-1} x_{n-k_l-k_{l-1}} + \underbrace{* \, x_{n-k_l-k_{l-1}+1} + \ldots + * x_n}_{\text{bekannt}} = d_{l-1}$$

usw.. Man erhält eine Lösung, die von $k_0 + k_1 + \ldots + k_l = n - l$ Parametern abhängt.

Dieses Lösungsverfahren: Zeilen-Stufenform herstellen und anschließend von unten auflösen, heißt <u>Gauss-Algorithmus</u> (auch: <u>Gauss'sches Eliminierungsverfahren</u>).