1.5 Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen

Die Ordnungsrelation "$<$" auf $\mathbb{R}$ ist durch drei Eigenschaften vollständig charakterisiert:

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Beziehungen

$$0 < x \quad \underline{\text{oder}} \quad 0 < -x \quad \text{oder} \quad 0 = x,$$

(b) $0 < x$ und $0 < y \Rightarrow 0 < x + y$,

(c) $0 < x$ und $0 < y \Rightarrow 0 < xy$.

Die Eigenschaften (b) und (c) kann man auch so formulieren: Die Menge $\mathbb{R}^+$ der positiven reellen Zahlen ist abgeschlossen unter Addition und Multiplikation.

Zusammen mit den Rechenregeln für $+$ und $\cdot$ erhält man aus (a) bis (c) alle Regeln für das Rechnen mit und die Auflösung von Ungleichungen. Die wichtigsten sind im folgenden zusammengestellt:

<u>Rechenregeln für Ungleichungen</u>

Es seien x, y, z reelle Zahlen und $x < y$. Dann gelten:

(i) $x + z < y + z$ (Addition einer reellen Zahl auf beiden Seiten einer Ungleichung ändert also nicht die Lösungsmenge.)

(ii) $x > 0 \iff -x < 0$ (aus (a))

(iii) Für $z > 0$ ist $xz < yz$. (Multiplikation mit einer positiven Zahl erhält also die Ungleichung.)

(iv) Für $z < 0$ ist $xz > yz$. (Bei Multiplikation mit einer negativen Zahl kehrt sich das Ungleichheitszeichen um.)

(v) Für $x \neq 0$ ist $x^2 > 0$, insbes. $1 > 0$

(Die Gleichung $x^2 = -1$ hat also in $\mathbb{R}$ keine Lösung.)

(vi) Für $x > 0$ ist auch $\frac{1}{x} > 0$, für $x < 0$ ist auch $\frac{1}{x} < 0$. (Das Vorzeichen einer reellen Zahl bleibt bei Kehrwertbildung erhalten.)

(vi) Ist $0 < x < y$ oder $x < y < 0$, so ist $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

(Beachte: $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} > 0$.)

Das "Auflösen von Ungleichungen" soll anhand einiger Beispiele erläutert werden:

Bsp. 1: Löse $2x > 10$, d.h. gesucht ist $\{x \in \mathbb{R} : 2x > 10\}$

Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ (>0) erhält nach Regel (iii) die Ungleichung, also

$2x > 10 \iff x > 5$ und daher $\{x \in \mathbb{R} : 2x > 10\} = (5, \infty)$.

Bsp. 2: $-2x > 10$. Multiplikation mit $-\frac{1}{2}$ kehrt die Ungleichung um, also

$-2x > 10 \iff x < -5$.

Dies ergibt $\{x \in \mathbb{R} : -2x > 10\} = (-\infty, -5)$.

Bsp. 3: $\dfrac{x}{2x-1} < \dfrac{1}{3}$ $(*)$

Fall 1: $x = \frac{1}{2}$ ist keine Lösung, hierfür ist die linke Seite nicht definiert.

Fall 2: $x > \frac{1}{2}$, d.h. $2x - 1 > 0$. Hierfür ist

$(*) \iff x < \frac{1}{3}(2x-1) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ (Regel (iii))

$\iff \frac{x}{3} < -\frac{1}{3} \iff x < -1$ (Regeln (i), (iii)).

Unvereinbar mit $x > \frac{1}{2}$

Fall 3: $x < \frac{1}{2}$. Hier ist $(*) \iff x > \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ (Regel (iv)

$\iff \frac{x}{3} > -\frac{1}{3} \iff x > -1$ (i), (iii)

Ergebnis: $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x}{2x-1} < \dfrac{1}{3}\right\} = (-1, \frac{1}{2})$.

Bsp. 4: $x^2-2x-3<0$.

Die quadratische Gleichung $x^2-2x-3=0$ hat die Lösungen $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm 2$, also $x_1=-1$ und $x_2=3$. Für die quadratische Funktion $q(x)=x^2-2x-3$ heißt das $q(x)=(x-3)(x+1)$.

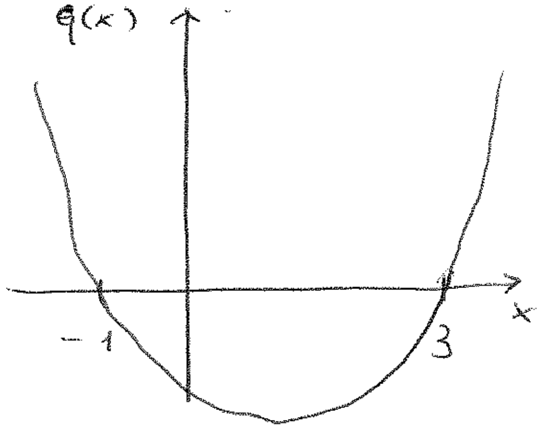
(a) Lösung durch Rechnung: Allgemein gilt

$$a\cdot b<0 \iff a<0<b \text{ oder } b<0<a.$$

Für $a=x-3$ und $b=x+1$ kommt nur $x-3<0<x+1$ in Frage. Also:

$$q(x)<0 \iff x-3<0<x+1 \iff -1<x<3.$$

(b) Graphische Lösung: Der Graph von q ist eine nach <u>oben</u> geöffnete Parabel, die die x-Achse in $x_1=-1$ und $x_2=3$ schneidet.



Hieraus ist ablesbar:

$q(x)<0 \iff -1<x<3$

Ergebnis in beiden Fällen: $\{x\in\mathbb{R}: x^2-2x-3<0\}=(-1,3)$.

Mit Hilfe der Ordnungsrelation < können wir das Maximum und das Minimum einer Menge reeller Zahlen definieren:

<u>Def.</u>: $M \subset \mathbb{R}$ sei eine Menge reeller Zahlen. $x_0 \in M$ heißt

- das Maximum (größte Element) von M, wenn $x_0 \geq x$ für alle $x \in M$;
- das Minimum (kleinste Element) von M, wenn $x_0 \leq x$ für alle $x \in M$.

<u>Bem.</u>: (1) Wenn das Maximum existiert, ist es eindeutig bestimmt.

(2) Nicht jede Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum, z.B. $(0,\infty)$. Auch $(0,1)$ besitzt kein Maximum, obwohl dies eine beschränkte Menge ist. Die kleinste obere Schranke (=: Supremum) ist hier $x_0 = 1$, dies ist kein Element der Menge!

(3) Endliche Mengen und beschränkte abgeschlossene Intervalle besitzen stets ein Maximum.

(4) (1) bis (3) gelten entsprechend für das Minimum. Eine größte untere Schranke nennt man ein Infimum.

(5) Bez.: $\max M$ (für Maximum) und $\min M$ (für das Minimum); $\sup M$ (für das Supremum) und $\inf M$ (für das Infimum).

Wir kommen jetzt zu Gleichungen und Ungleichungen,
die den Absolutbetrag eines oder mehrerer Terme enthalten. Zur Erinnerung:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{" } x < 0 \end{cases}$$

Andere Darstellungsmöglichkeiten:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \max\{x, -x\}$$

<u>Eigenschaften</u> und <u>Rechenregeln</u>:

(i) $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $|x-y|$ bezeichnet den Abstand zweier Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ auf der Zahlengeraden,

(iii) $|x| = |-x|$, $x^2 = |x|^2$,

(iv) $|xy| = |x||y|$ und, falls $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$,

(v) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

Folgerung aus (v): $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$

Begründung: $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$

$\Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$. Vertausche jetzt x und y.

Um Gleichungen bzw. Ungleichungen zu lösen, in denen der Betrag vorkommt, ist in der Regel eine Fallunterscheidung entsprechend der obigen Definition zu treffen.

Bsp. 1: Die Gleichung $|x-2| = 2 - |3-2x|$ $(*)$

Um den Term $|x-2|$ aufzulösen, müssen wir zwischen $x \geq 2$ und $x \leq 2$ unterscheiden; zur Auflösung von $|3-2x|$ entsprechend zwischen $3 \geq 2x$ und $3 \leq 2x$.

Dies führt im Prinzip auf 4 Fälle:

(1) $x \geq 2$ und $x \geq \frac{3}{2}$

also: $x \geq 2$

(2) $x \leq 2$ und $x \geq \frac{3}{2}$

also: $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

(3) $x \geq 2$ und $x \leq \frac{3}{2}$

kommt nicht vor

(4) $x \leq 2$ und $x \leq \frac{3}{2}$

also: $x \leq \frac{3}{2}$.

(1) In diesem Fall lautet $(*)$:

$$x-2 = 2-2x+3 = 5-2x \iff 3x = 7 \iff x = \frac{7}{3}$$

und dies liegt tatsächlich im diskutierten Bereich.

(2) $(*)$ lautet: $2-x = 2-2x+3 \iff x = 3$

aber: $x > 3$, ist also keine Lösung!

(4) $(*)$ lautet $2-x = 2-3+2x \iff 0 = 3x-3$

$\iff x = 1$,

auch hierbei handelt es sich tatsächlich um eine Lösung.

Ergebnis: $(*)$ hat die Lösungsmenge $\{1, \frac{7}{3}\}$.

Entsprechende Fallunterscheidungen sind bei Ungleichungen mit Beträgen zu treffen:

Bsp. 2: $\left|\frac{x-2}{x-3}\right| \leq 2 \quad (**)$

Da $x=3$ keine Lösung ist (die linke Seite ist nicht definiert für $x=3$), sind die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

(1) $x \leq 2$ (2) $2 < x < 3$ (3) $3 < x$

(1) Hier ist $x-2 \leq 0$, $x-3<0$ und daher $\left|\frac{x-2}{x-3}\right| = \frac{x-2}{x-3}$.

(**) ist also äquivalent zu

$$\frac{x-2}{x-3} \leq 2 \underset{x-3<0}{\Longleftrightarrow} x-2 \geq 2x-6 \Longleftrightarrow 4 \geq x.$$

Alle $x \leq 2$ lösen also die Ungleichung.

(2) In diesem Fall ist $\frac{x-2}{x-3} < 0$, also $\left|\frac{x-2}{x-3}\right| = \frac{x-2}{3-x}$.

$\Rightarrow \quad (**) \Longleftrightarrow x-2 \leq 6-2x \Longleftrightarrow 3x \leq 8 \Longleftrightarrow x \leq \frac{8}{3}$

Also: Alle $x \in (2, \frac{8}{3}]$ sind ebenfalls Lösungen.

(3) Hier ist wieder $\left|\frac{x-2}{x-3}\right| = \frac{x-2}{x-3}$ und $x-3>0$. Also

$(**) \Longleftrightarrow x-2 \leq 2x-6 \Longleftrightarrow x \geq 4$. $[4,\infty)$ gehört daher zur Lösungsmenge

Ergebnis: Die Menge aller Lösungen der Ungleichung (**) ist gegeben durch $(-\infty, \frac{8}{3}] \cup [4,\infty)$.

Ungleichungen, die monotone Funktionen enthalten, sind mitunter leicht zu lösen, wenn man die Monotonie beachtet!

<u>Bsp</u> 3 $\quad e^{x^2-2x} \leq e^{3x}$

Da die Exponentialfunktion (streng) monoton steigt, ist die angegebene Ungleichung äquivalent zu

$x^2-2x \leq 3x \iff x^2-5x \leq 0 \iff x(x-5) \leq 0$

$\iff \quad 0 \leq x \leq 5.$ Damit ist die Lösungsmenge der obigen Ungleichung durch das Intervall $[0,5]$ gegeben.