GdT o-minimalité
Arnaud Plessis
5 avril 2017.

Utilisation de l'o-minimalité pour montrer Manin-Mumford.

$\mathbb{G}_m^n = (\mathbb{C}^*)^n$

Thm (Laurent) Soit $V \subseteq \mathbb{G}_m^n$ variété irréductible définie sur un corps de nombres K. Alors on peut trouver un nombre fini cosets de torsion B_i (i.e. $b_i \in Tor(B_i)$ et B_i est un sous-gp algébrique de $\mathbb{G}_m^n$ irréductible) tels que $b_iB_i \subseteq V$ et $V_{tors} = V \cap Tors(\mathbb{G}_m^n) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} b_i B_i$.

Dans cet exposé on travaillera qu'avec $\mathbb{R}an$.

Déf. Si X est déf. on peut montrer que X^{alg} est aussi l'union de toutes les semi-alg. infinis connexes de dim 1.

Étape 1: construction d'un définissable X t.q
$X \cap \mathbb{Q}^n \overset{f}{\twoheadrightarrow} V_{tors}$

Étape 2: On montrera $x \in X^{alg} \cap \mathbb{Q}^n \rightarrow f(x) \in bB$ coset de torsion infini.

Étape 3: Utilisation de Pila-Wilkie pour montrer que
$(X \setminus X^{alg}) \cap \mathbb{Q}^n$ est fini $\rightarrow \exists$ nombre fini b_iB_i avec $B_i =$

Étape 4: conclure.

Étape 1

Soit $g : \begin{array}{l} [0,1]^n \longrightarrow [0,2i\pi]^n \\ (x_1,\dots,x_n) \longmapsto (2i\pi x_1, \dots, 2i\pi x_n) \end{array}$ et $\exp : \begin{array}{l} [0,2i\pi]^n \longrightarrow \mathbb{G}_m^n \\ (y_1,\dots,y_n) \longmapsto (e^{y_1},\dots,e^{y_n}) \end{array}$

$f = \exp \circ g$ et $X = f^{-1}(V)$

X, V sont donc déf dans $\mathbb{R}an$

Rmq : $X \cap \mathbb{Q}^n \overset{1:1}{\underset{f}{\longleftrightarrow}} V_{tors}$.

Étape 2 :

soit $x \in X^{alg}$. Alors, il existe une courbe semi-alg $C \subseteq X$ t.q $x \in C$. De plus C est un morceau d'une courbe algébrique.

Thm (Ax) soit (K, δ) un corps differentiel avec corps de constants k^*. Soient $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n \in K$ tels que $\forall i \quad \delta(y_i) = \dfrac{\delta(z_i)}{z_i}$, alors si $\deg tr(\bar{y}, \bar{z}/k) \leq r$

alors $\exists\, m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}$ non tous nuls

$$\prod z_i^{m_i} \in k \quad \text{et} \quad \sum_i m_i y_i \in k$$

soit B un sous-gp alg. irréductible infini de $\mathbb{G}_m^n$.

On note $M_B = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{\ell \times n}(\mathbb{Z})$ t.q

$$B = \{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{G}_m^n : \prod_{j=1}^{n} z_j^{a_{ij}} = 1, \ \forall i = 1, \dots, \ell \}$$

OPS que $rg(M_B) = \ell$

On note $LB = \{ y \in \mathbb{C}^n \mid M_B y = 0 \}$

Rmq : $B \longleftrightarrow LB$

$(\exp(y_1), \dots, \exp(y_n)) \longleftarrow (y_1, \dots, y_n)$

②

On utilise

$$\gamma : \begin{array}{ccc} t \in [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \end{array}$$ déjà courbe algébrique.

une paramétrisation

Lemme : soit B ss-gp alg irréduc. et minimal de $\mathbb{G}_m^n$ t.q
$(2i\pi\gamma_1(t), \dots, 2i\pi\gamma_n(t)) \subset c + LB$ $*$ pour un certain $c \in \mathbb{C}^n$,
alors $$\deg tr\,(2i\pi\gamma_1, \dots, 2i\pi\gamma, \exp(2i\pi\gamma_1), \dots, \exp(2i\pi\gamma_n))$$ sur $\mathbb{C}$
$$= \dim B$$

et $\exp c . B \subseteq V$.

Dém : $\dim LB = s > 0$. On va s'intéresser au nombre maximal N tel qu'il existe un N-uplet $(\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_N})$ t.q il n'y a pas de relation de la forme
$$\sum_{j=1}^{N} m_j \gamma_{i_j} \in \mathbb{C} \quad \text{avec } m_1, \dots, m_N \in \mathbb{Z}.$$

Déjà, $N \leq s$ et supposons que $N < s$
$\Rightarrow \forall i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ il existe $(a_{ij}) \in \mathbb{Z}$ t.q

$$\sum a_{ij} \gamma_{ij} \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad N = s.$$

Soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_\ell)$ une famille (quitte à changer l'ordre des indices) telle que il n'y a pas de relation de la forme
$$\sum_{j=1}^{\ell} m_i \gamma_i \in \mathbb{C} \quad \text{avec } m_i \in \mathbb{Z}$$

On va montrer que $\deg tr\,(\mathbb{C}(\exp(2i\pi\gamma_1), \dots, \exp(2i\pi\gamma_\ell)) / \mathbb{C}) = \ell$

soit $D = \deg tr\left(\mathbb{C}(2i\pi\gamma_1, \ldots, 2i\pi\gamma_l) / \mathbb{C} \right) \leq l$

car $(2i\pi\gamma_1, \ldots, 2i\pi\gamma_l) \in C$ par le Thm de Ax

$\Rightarrow \exists m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{Z}$ t.q $\sum_{i=1}^{l} m_i \gamma_i \in \mathbb{C}$, contradiction.

Ainsi, $(\exp(2i\pi\gamma_1), \ldots, \exp(2i\pi\gamma_n)) \subseteq \exp(c) B$

comme $(\exp(2i\pi\gamma_1), \ldots, \exp(2i\pi\gamma_n)) \subseteq V$

$\Rightarrow \exp(c).B \in V$.

Alors si $a \in X^{alg} \cap \mathbb{Q}^m$ on a que $f(a) \in bB$ où B est un coset de torsion.

<u>Étape 3</u> $X \setminus X^{alg} \cap \mathbb{Q}^n$ est fini.

Rappel : V est défini sur k, que l'on peut supposer galoisienne sur $\mathbb{Q}$ et de degré D.

Soit $a \in V_{tors}$. Alors $\forall \sigma \in Gal(\mathbb{C}/k)$ $\sigma(a) \in V_{tors}$.

On note $m = ord(a)$, Ainsi $[\mathbb{Q}(a), \mathbb{Q}] = \phi(m)$

donc $\frac{\phi(m)}{l} \leq \frac{[k(a); \mathbb{Q}]}{l} = [k(a); k] \leq [\mathbb{Q}(a); \mathbb{Q}] = \phi(m)$

Or il est bien connu que pour $\varepsilon > 0$ assez petit

$\exists M_\varepsilon \mid \forall m \geq M_\varepsilon$ $\phi(m) \geq m^\varepsilon$, donc

$\forall a \in V_{tors}$,

alors $\left| Gal(k(a)/k) \right| \geq \frac{m^{1/2}}{\ell}$

Déf : soit $x \in \mathbb{Q}^{\times}$, on note $H(x)$ la hauteur, étendue à $(\mathbb{Q}^{\times})^n$ de façon standard.

On peut maintenant montrer la finitude de $(X \setminus X^{alg}) \cap \mathbb{Q}^m$. Par l'absurde, supposons que

$\forall N > M_{1/2}$, $\exists x_N \in (X \setminus X^{alg}) \cap \mathbb{Q}^n$ t.q $ord(f(x_N)) > N$

donc $f(x_N) \in V_{tors}$ et $\sigma(f(x_N))$ est aussi de torsion.

Notons $x_N(\sigma)$ l'élément t.q $f(x_N(\sigma)) = \sigma(f(x_N))$

On remarque que $x_N(\sigma) \in X \cap \mathbb{Q}^m$ mais $x_N(\sigma) \notin X^{alg}$

(s'il était $\overset{E1}{\Rightarrow}$ $f(x_N(\sigma)) \in bB$ infini coset de torsion

$\Rightarrow$ $f(x_N) \in \sigma^{-1}(b)B'$ infini "

mais $x_N \notin X^{alg}$.)

De plus $ord(f(x_N(\sigma))) = ord(f(x_N))$ et donc

$H(x_N(\sigma)) \leq ord(f(x_N))$

Donc

$$\#\{x \in (X \setminus X^{alg}) \cap \mathbb{Q}^m \mid H(x) \leq ord(f(x_N))\} \geq \frac{ord(f(x_N))^{1/2}}{\ell}$$

mais par Pila-Wilkie avec $\varepsilon = 1/3$

$$N(X \setminus X^{alg}, \mathrm{ord}(x_N)) \leq c_{1/3}\, \mathrm{ord}(x_n)^{1/3}.$$

Cor 2 : tout élément de V_{tors} est soit dans $f(X \setminus X^{alg} \cap \mathbb{Q}^n)$ (qui est fini) ou dans un coset de torsion.

Étape 4 Dans le cor. 2 :

Sans perte de gén., on peut sup. que $bB \subseteq V$ est maximal, c-a-d, $\nexists$ coset de torsion $bB' \subseteq V$ t.q $bB \subsetneq bB' \subseteq V$.

À partir de maintenant bB sera toujours un coset de torsion maximal.

Dans un premier temps, on montre que le nombre de B t.q $\exists b$ t.q bB soit max est fini

(Il suffit par exemple de montrer que les bB qui vont intervenir sont de degré bornée).

Il reste à montrer que pour chaque B, l'ensemble $W_B = \{b \in \mathrm{Tor}(\mathbb{G}_m^n) : bB \subseteq V \text{ max et fini}\}$ est fini. Sup. par l'absurde qu'il est infini.

$\pi : \mathbb{G}_m^n \to \mathbb{G}_m^n / B \cong \mathbb{G}_m^n$ $\quad W_B' = \pi(W_B)$ $\quad W'$ est constitué de pts de torsion, or W_B' est infini

donc $\exists b \in W_B \,/\, \pi(b) \in \pi(b)$, $H \subseteq W_B'$ avec H ss-gp alg irré.

$\Rightarrow bB \subsetneq b\,\pi^{-1}(H) \subseteq \pi^{-1}\pi(W_B) \subseteq V.$