15/3
2017

GdT o-minimalité (théorème de reparametrisation)

Théorème (Pila-Wilkie) : Soit $F :]0,1[^m \longrightarrow]0,1[^n$ définissable dans une expansion o-minimale de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, soit p un entier positif.
Il existe Φ d'applications $\{\varphi_i :]0,1[^m \longrightarrow]0,1[^m\}$ et tel que :

1- $\bigcup_{\varphi \in \Phi} \mathrm{Im}(\varphi) =]0,1[^m$

2- φ et $F_i \circ \varphi \in \mathcal{C}^{p+1}$

3- $\|(F_i \circ \varphi)^{(k)}\|_n \leq 1$ et $\|\varphi^{(k)}\|_m \leq 1$ pour tout i, pour tout k, pour tout φ.

Remarque : le théorème qu'il faudrait montrer pour prouver Pila-Wilkie est plutôt une version "uniforme" :
si $F_a :]0,1[^m \longrightarrow]0,1[^n$, $a \in \mathbb{R}^k$ est une famille de fonctions, il existe Φ comme dans le théorème tel que la taille de Φ reste la même pour tout a

Aujourd'hui on montrera le cas $m = 1$ (n quelconque)

Soit $p = 1$. Par le théorème de monotonie (cfr. séances 2 et 3) il existe $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_N < a_{N+1} = 1$ tels que

(P1) • $F_i|_{]a_j, a_{j+1}[}$ est $\mathcal{C}^1$ et monotone

(P2) • Le signe de $(|F_1'(x)| - |F_k'(x)|)$ est constant dans $]a_j, a_{j+1}[$ pour tout $i, k \in \{1, \ldots, m\}$ et tout $j \in \{0, \ldots, N\}$.

(pour (P2) il faut observer que $\{x : |F_i'(x)| - |F_k'(x)| > 0\}$ est definissable.

Quitte à rajouter $F_{n+1} = id_{]0,1[}$ et remplacer n avec $n+1$, pour j fixé on peut prendre F_{i_j} t.q.

$$\bullet \quad |F_{i_j}'(x)| \geq |F_k'(x)|$$

pour $x \in]a_j, a_{j+1}[$ et $k \in \{1, .., n\}$

C1 $\bullet$ F_{i_j} n'est pas constante

C2 $\bullet$ $|F_{i_j}'(x)| \geq 1$.

Or, F_{i_j} est monotone ~~et~~ sur $]a_j, a_{j+1}[$ et

$$F_{i_j}(]a_j, a_{j+1}[) =]c, d[\quad \text{avec}$$

$0 < c < d < 1$.

Soit $f(x) = c + (d-c)x$ et

$$\varphi_j(x) = F_{i_j}^{-1} \circ f$$

$$]0,1[\xrightarrow{f}]c,d[\xrightarrow{F_{i_j}^{-1}}]a_j, a_{j+1}[.$$

$$\varphi_j$$

Or, montrons que φ_j satisfait 1, 2, 3.

1 OK, quitte à rajouter $\varphi_{j,j+1} :]0,1[\longrightarrow]0,1[$

$x \longmapsto a_{j+1}$

2 OK

③ : $|\varphi_j'(x)| = |(F_{i_j}^{-1}\circ f)'(x)| = \left|\dfrac{f'(x)}{F_{i_j}'\left(F_{i_j}^{-1}(f(x))\right)}\right| =$

$$= \left|\frac{d-c}{F_{i_j}'(\varphi_j(x))}\right| \underset{\text{pour } C2}{\leq} |d-c| \leq 1 .$$

et

$$|(F_i\circ\varphi_{i_j})'(x)| = |F_i'(\varphi_j(x))|\,|\varphi_j'(x)|$$

$$= \frac{|F_i'(\varphi_j(x))|\,|d-c|}{|F_{i_j}'(\varphi_j(x))|} \leq 1 .$$

<u>Réduction 1</u> : il suffit de trouver ~~pour~~ Φ satisfaisant ①, ② et

③' : il existe $B = B(p)$ t.q.

$$|\varphi^{(q)}| \leq B$$

$$|(F_i\circ\varphi)^{(q)}| \leq B$$

En effet, pour tel Φ, alors $\exists\, \Phi^*$ qui satisfait ①, ② et ③.

<u>Réduction 2</u> : OPS F $\mathcal{C}^1$ et chaque $|F_i'| \leq 1$.

En effet, supposons le résultat vrai, soit F quelconque.
Considérons Φ pour F donné par $p = 1$ ($\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$)

Considérons $G : x \longmapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x), F_1\circ\varphi_1(x), \dots, F_m\circ\varphi_N(x))$

Par hypothèse, il existe Φ^* vérifiant ①, ②, ③ pour G.

On vérifie que $\Omega_1 = \left\{ \varphi \circ \psi \quad \begin{array}{l} \varphi \in \Phi \\ \psi \in \Phi^* \end{array} \right\}$

satisfait ① ② et ③ pour F.

Supposons F $\mathcal{C}^1$ et $|F_i'| \leq 1$. Par o-minimalité
ils existent

$$0 = a_0 < \dots < a_N = 1 \quad \text{t.q.}$$

(A1) - $F|_{]a_j, a_{j+1}[}$ est $\mathcal{C}^{p+1}$

(A2) - $F_i^{(q)}|_{]a_j, a_{j+1}[}$ est identiquement nulle ou ne s'annule pas.

On pose $\varphi_j :]0, 1[\longrightarrow]a_j, \underbrace{\frac{a_{j+1} - a_j}{2}}_{a_j^*}[$

$$x \longmapsto a_j + \left(\frac{a_{j+1} - a_j}{2}\right) x^p$$

$$\Phi = \{ \varphi_j, a_j - \varphi_j, \text{ constantes } a_j \}$$

et il suffit de montrer ③ pour φ_j :

(i) $|F_i \circ \varphi_j^{(q)}| \leq B$.

(ii) $|\varphi_j^{(q)}| \leq B$ et $\varphi_j^{(q)}$ ne s'annule pas.

Pour (ii) : $|\varphi_j^{(s)}(x)| = \left| \frac{p!}{s!} \cdot \left(\frac{a_{j+1} - a_j}{2}\right) x^{p-s} \right| \leq p!$

Pour (i) on utilise

<u>Lemme 1</u> : Si $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ on a que ~~$(f \circ g)^{(q)}$~~

$$|f\circ g|^{(q)} = \sum_{k=1}^{q} f^{(k)}(g(x)) \cdot \left[\sum^{\langle q,k\rangle} B_q(k_1,\dots,k_q) \prod_{s=1}^{q} \left(g^{(s)}(x_s)\right)^{k_s} \right] \text{ où}$$

$\langle q, k\rangle$ = ensemble d'uplets de $\mathbb{N}^q$ t.q.

$$\begin{cases} - & k_1 + \dots + k_q = k \\ - & k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + q\,k_q = q \end{cases}.$$

Or, par le Lemme 1

$$|(F_i \circ \varphi_j)^{(q)}| = \Big| \sum \underbrace{F_i^{(k)}(\varphi_j(x))}_{\text{II}} \Big[\sum^{\langle q,k\rangle} B_q \cdot \underbrace{\prod_{s=1}^{q} (\varphi_j^{(s)}(x))^{k_s}}_{\text{I}} \Big]\Big|$$

et il faut borner I et II.

- I c'est simple : $\text{I} \leq p^q \left(\frac{a_{j+1}-a_j}{2}\right)^{k} \cdot x^{pk-q}$

Pour II on utilise

<u>Lemme 2</u> : $I =]a, b[$, $f : I \to]0,1[$ de classe $\mathcal{C}^{q+1}$ t.q. $f^{(q)}$ ne s'annule pas et $|f'(x)| \leq 1$ alors

$$|f^{(q)}(x)| \leq \left(\frac{q}{\delta_I(x)}\right)^{q-1} \quad \text{où} \quad I = \min\{x-a, b-x\}.$$

En appliquant ce lemme,

à $F_i|_{]a_j, a_{j+1}[}$ on a, comme $\varphi_j(x) \in \left]a_j, a_j + \frac{a_{j+1}-a_j}{2}\right[$

$$\text{II} \leq \left(\frac{2q}{(a_{j+1}-a_j)\cdot x^p}\right)^{q-1}$$ et le $\frac{1}{x^p}$ s'annule avec la borne trouvé pour I. ∎