

---

BEWERTETE KÖRPER  
Übungsfragen

---

1. ABSOLUT BETRÄGE

- (1) Was ist der Unterschied zwischen einem archimedischen und nicht-archimedischen Betrag?
- (2) Was ist der Unterschied zwischen einem absoluten Betrag und einer Bewertung?
- (3) Welche absoluten Beträge gibt es auf  $\mathbb{Q}$ ?
- (4) Welche absoluten Beträge gibt es auf  $K(x)$ , die trivial auf  $K$  sind?
- (5) Was besagt den Approximationssatz für absolute Beträge? Und für Bewertungen? Was ist der Unterschied?
- (6) Was bedeutet, dass ein Körper bezüglich eines Betrages vollständig ist?
- (7) Sind  $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ ,  $(\mathbb{Q}, |\cdot|_{\text{triv}})$ ,  $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$  vollständig?
- (8) Sei  $K$  ein Körper von Kardinalität größer als der Kardinalität von  $\mathbb{C}$ . Warum gibt es keinen archimedischen Betrag auf  $K$ ?
- (9) Warum kann man sagen, dass "alle archimedische absolute Beträge von  $\mathbb{C}$  kommen"?
- (10) Warum sind alle Beträge auf einem Körper, der positive Charakteristik hat, nicht archimedisch?

2. BEWERTETE KÖRPER

2.1. **General.**

- (1) Was ist der Rang einer AAG? Was ist der Rang eines bewerteten Körpers?
- (2) Zeige, dass es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein bewerteter Körper mit Rang  $n$  existiert.
- (3) Was besagt die Korrespondenz zwischen bewerteten Körpern von Rang 1 und nicht-archimedischen absoluten Beträgen?
- (4) Was ist ein lokaler Ring? Was ist ein DVR (diskreter Bewertungsring)? Ist jedes lokaler Ring ein DVR?
- (5) Sei  $(K, v)$  ein bewerteter Körper. Welche Beziehung gibt es zwischen konvexen Untergruppen von  $\Gamma_v$  und Primidealen von  $\mathcal{O}_v$ ?

2.2. **Fortsetzungen.**

- (1) Was besagt der Satz von Chevalley?
- (2) Hat jede Bewertung eine Fortsetzung?
- (3) Hat jeder Betrag eine Fortsetzung?
- (4) Hat jeder Körper eine nicht-triviale Bewertung?
- (5) Was ist die "fundamentale Ungleichung"?
- (6) Was ist die Abhyankar-Ungleichung?
- (7) Was besagt der Konjugationssatz?

2.3. **Henselsche Körper.**

- (1) Was ist ein bewerteter Henselscher Körper?
- (2) Nenne 2 verschiedene äquivalente Definitionen von Henselsch Sein.
- (3) Ist  $(\mathbb{Q}, v_p)$  Henselsch?
- (4) Gegeben Sie Beispiele von Henselschen Körpern.

#### 2.4. Hahn-Reihen.

- (1) Was ist die Definition des Körpers der Hahn-Reihen  $k((t^\Gamma))$ ? Wie ist darauf die kanonische Bewertung definiert? Was ist die Wertegruppe und der Restklassenkörper?
- (2) Welche anderen Eigenschaften kennen Sie über  $k((t^\Gamma))$ ?
- (3) Gibt es einen Körper der Hahn-Reihen Körper mit gemischter Charakteristik?

#### 2.5. Pseudo-Cauchy, sphärische Vollständigkeit und maximale Körper.

- (1) Sei  $(K, v)$  ein bewerteter Körper und  $(a_\lambda)_{\lambda < \kappa}$  eine Folge ( $\kappa$  Limes-Ordinalzahl). Angenommen, die Folge wird nicht irgendwann konstant. Was bedeutet, dass die Folge pseudo-Cauchy ist?
  - (2) Sei  $(K, v)$  ein bewerteter Körper und  $(a_\lambda)_{\lambda < \kappa}$  eine Folge ( $\kappa$  Limes-Ordinalzahl). Was bedeutet es, dass die Folge nach  $b \in K$  pseudo-konvergiert?
  - (3) Ist ein Pseudolimes von einer Folge  $(a_\lambda)_{\lambda < \kappa}$  eindeutig?
  - (4) Was bedeutet für einen bewerteten Körper maximalvollständig zu sein?
  - (5) Was bedeutet für einen bewerteten Körper sphärischvollständig zu sein?
  - (6) Was ist der Unterschied zwischen algebraischen und transzendenten pseudo-Cauchy Folgen?
  - (7) Sei  $(K, v)$  bewerteter Körper. Angenommen, dass jede pc-Folge einen pc-Limes hat. Ist  $K$  henselsch?
-