Bewertete Körper
Hausaufgabe 7

Aufgabe 1. Sei G eine abelsche Gruppe und G_d die dividierbare Hülle von G. Sei $\varphi\colon G \to G_d$ die Einbettung $g \mapsto g \otimes 1$.

(1) (2 Punkte) Zeige, dass jedes Element von G_d einen Repräsentanten der Form $x \otimes \frac{1}{n}$ besitzt (mit $n \in \mathbb{N}^*$).

(2) (2 Punkte) Sei G eine AAG (mit Ordnung $\leqslant_G$). Zeige, dass durch die Relation auf G_d

$$x \otimes \frac{1}{m} \leqslant y \otimes \frac{1}{n} \Leftrightarrow nx \leqslant_G my$$

die Struktur einer AAG auf G_d induziert.

(3) (2 Punkte) Sei $f\colon G \to H$ eine Gruppeneinbettung und H eine dividierebare Gruppe. Zeige dass es eine Gruppeneinbettung $\psi\colon G_d \to H$ gibt, so dass $\psi \circ \varphi(x) = f(x)$ für alle $x \in G$.

Aufgabe 2. (2 Punkte) Sei $\Gamma \leqslant \Gamma'$ eine AAG Erweiterung. Zeige, dass

$$\mathrm{rr}(\Gamma') \leqslant \mathrm{rr}(\Gamma) + \mathrm{rr}(\Gamma'/\Gamma) \text{ und}$$
$$\mathrm{Rang}(\Gamma') \leqslant \mathrm{Rang}(\Gamma) + \mathrm{rr}(\Gamma'/\Gamma)$$

Aufgabe 3. Sei (K, v) ein bewerteter Körper. Zeige, dass es genau eine Fortsetzung w nach $K(X)$ gibt mit den folgenden Eigenschaften (im jedem Fall):

(1) (4 Punkte) mit $\bar{X} := \mathrm{res}(X)$ transzendent über $\overline{K}_v$, $\overline{K(X)}_w = \overline{K}_v(\bar{X})$ und $\Gamma_w = \Gamma_v$.

(2) (4 Punkte) mit $\gamma := w(X)$, $w(K(X)) = \Gamma \oplus \mathbb{Z}\gamma$ und $\overline{K(X)}_w = \overline{K}_v$.

(Hinweiss: für Existenz nutze Satz 6.5 und Hausaufgabe 5).

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei (K, v) ein bewerteter Körper mit K algebraischabgeschlossen. Zeige, dass Γ_v dividierbar ist und $\overline{K}_v$ algebraischabgeschlossen ist.

(Abgabe 01.06.22)