Bewertete Körper

Hausaufgabe 6

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei $(K, v) \subseteq (L, w)$ bewerteter Körper Erweiterung mit L/K algebraisch. Zeige, dass $\mathrm{Rang}(v) = \mathrm{Rang}(w)$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei (K, v) bewertete Körper. Sei $P(X)$ ein normiertes Polynom mit Koeffizienten aus $\mathcal{O}_v$. Zeige, dass jede Nullstelle in K des Polynoms $P(X)$ in $\mathcal{O}_v$ liegt.

Wir schreiben $(L/K, v)$ für eine Erweiterung bewerteter Körper $(K, v_{|K}) \subseteq (L, v)$.

Definition. Sei $(L/K, v)$ Erweiterung bewerteter Körper. Elementen $x_1, \ldots, x_n \in L^\times$ heißen K-Bewertung unabhängig, falls

$$v(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \min_i \{v(a_i x_i)\}$$

für alle $a_1, \ldots, a_n \in K$ gilt.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $(L/K, v)$ Erweiterung bewerteter Körper mit $e = f = 1$. Zeige, dass jeden verschiedenen Elementen $a, b \in L^\times$ K-Bewertung abhängig sind.

Aufgabe. (8 Punkte) Sei $(L/K, v)$ Erweiterung bewerteter Körper mit $[L : K] < +\infty$. Zeige, dass $e = f = 1$ genau dann, wenn die Menge

$$v(a - K) \coloneqq \{v(a - b) : b \in K\}$$

kein maximale Element für alle $a \in L \setminus K$ hat.

(Abgabe 26.05.22)