Bewertete Körper
Hausaufgabe 5

Aufgabe 1. (2 Punkte) Zeige, dass es auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zwei Totalordnungen $\leqslant_1, \leqslant_2$ gibt, sodass $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \leqslant_1, 0)$ und $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, +, \leqslant_2, 0)$ angeordnete abelsche Gruppen sind, die zueinander nicht isomorph sind.

Definition. Seien K und L zwei Körper. Wir erweitern dabei formal die Addition und Multiplikation in L auf $L \cup \{\infty\}$ (wobei hier ∞ ein neues Element sei) für $a \in L, b \in L \setminus \{0\}$ via

$$a + \infty = \infty + a = \infty + \infty = \infty, \quad b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty \cdot \infty = \infty,$$

wobei die Operationen $0 \cdot \infty$ und $\infty \cdot 0$ nicht definiert sind. Eine surjektive Abbildung $\varphi \colon K \to L \cup \{\infty\}$ heißt eine *Stelle*, falls folgende Eigenschaften für alle $x, y \in K$ erfüllt sind:

(1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
(2) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ (falls $\varphi(x) \cdot \varphi(y)$ definiert ist)
(3) $\varphi(1) = 1$

Aufgabe 2. Sei $\varphi \colon K \to L \cup \{\infty\}$ eine Stelle.

(1) (4 Punkte) Zeige, dass $\mathcal{O} = \varphi^{-1}(L)$ ein Bewertungsring mit maximalen Ideal $\mathcal{M} = \varphi^{-1}(\{0\})$ und Restklassenkörper $\bar{K} \cong L$ ist.
(2) (4 Punkte) Für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$, der in K enthaltet ist, mit maximalen Ideal $\mathcal{M}$, definiert die Abbildung

$$\varphi(x) = \begin{cases} res(x) = x + \mathcal{M} & x \in \mathcal{O} \\ \infty & x \in K \setminus \mathcal{O} \end{cases}$$

eine Stelle $\varphi \colon K \to L \cup \{\infty\}$ mit $L = \mathcal{O}/\mathcal{M}$.

Aufgabe 3. Sei (K, v) ein bewerteter Körper mit Wertegruppe Γ und sei $\Gamma \leqslant \Gamma'$ eine geordnete abelsche Untergruppe. Sei X transzendent über K und $\gamma \in \Gamma'$ beliebig. Wir werden im Kurs die Bewertung auf $K(X)$ mit Wertegruppe $\Gamma + \mathbb{Z}\gamma$ via

$$w(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i) = \min\{v(a_i) + i\gamma\}$$

definieren. Betrachte folgende Spezialfälle:

(1) (5 Punkte) Wir nehmen $\gamma = 0$ an. Dann heißt w die Gauß-Erweiterung von v. Zeige, dass $\bar{X} := res(X)$ transzendent über $\overline{K(X)}_w$ ist und, dass $\overline{K(X)}_w = \overline{K}_v(\bar{X})$ gilt.
(2) (5 Punkte) Wir nehmen nun $\gamma \notin \Gamma$ an, sodass $\Gamma \cap \mathbb{Z}\gamma = \{0\}$ gilt. Zeige, dass $w(K(X)) = \Gamma \oplus \mathbb{Z}\gamma$ und $\overline{K(X)}_w = \overline{K}_v$ gelte.

(Abgabe 18.05.22)