Bewertete Körper

Hausaufgabe 3

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei K eine Körpererweiterung auf $\mathbb{R}$, $|\cdot|$ ein Betrag auf K kompatible mit $|\cdot|_\infty$, $b \in K$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$z \mapsto |b^2 - (z + \bar{z})b + z\bar{z}|.$$

Zeige, dass f stetige ist.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

(1) eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x_i \in X$ konvergiert gegen $x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung U von x ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x_i \in U$ gilt für alle $i \geq n$.

(2) Der Raum X ist Kompakt, falls jede offene Überlagerung $\bigcup_{i\in I} U_i$ auf X ($\bigcup_{i\in I} U_i = X$) ein endliche Teilüberlagerung $\bigcup_{i\in I_0} U_i$ hat ($I_0 \subseteq I$ endliche Teilmenge und $\bigcup_{i\in I_0} U_i = X$).

(3) X ist *folgenkompakt*, wenn jede Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x_i \in X$ eine konvergente Teilfolge enthält ($(a_j)_j \in J$ ist eine Teilfolge, wenn $J \subseteq \mathbb{N}$ unbeschränkt ist).

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum, der Kompakt ist.

(1) (4 Punkte) Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeige, dass $f(X)$ Kompakt ist.

(2) (4 Punkte) Zeige, dass, wenn X ein metrischer Raum ist (d.h., τ ist von einer Metrik erzeugt), ist X auch folgenkompakt.

(3) (4 Punkte) Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, die Kompakt ist. Zeige, dass X abgeschlossen und beschränkt ist.

(4) (4 Punkte) Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Schließe daran, dass es $x_1, x_2 \in X$ so

$$f(x_1) = \inf_{x\in X} f(x) \text{ und } f(x_2) = \sup_{x\in X} f(x).$$

gibt.

Extra:

Aufgabe* 3. Ist jeder kompakter topologischer Raum auch folgenkompakt?

(Abgabe 04.05.22)