BEWERTETE KÖRPER
Hausaufgabe 2

Definition. Ein lokaler (kommutativer) Ring ist ein Ring, in dem es genau ein maximales Ideal gibt.

Aufgabe 1. (2 Punkte) Zeige, dass R ein ist lokaler Ring ist genau dann wenn $R \setminus R^\times$ ein Ideal ist (hier $R^\times \coloneqq \{x \in R : \ x \text{ ein Einheit ist}\}$).

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei R ein lokaler Ring mit maximales Ideal $\mathcal{M}$. Zeige, dass

(1) jedes Element in $R \setminus \mathcal{M}$ eine Einheit ist;
(2) für jedes $x \in \mathcal{M}$ das Element $1 - x$ eine Einheit ist;

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei R ein Integritätsbereich, $K = \mathrm{Quot}(R)$ und $\mathfrak{p}$ eine Primideale von R. Zeige, dass die Lokalisierung Ring

$$R_\mathfrak{p} \coloneqq \{\frac{a}{b} \in K : a, b \in R, b \notin \mathfrak{p}\}$$

ein lokaler Ring ist.

Definition. Sei R ein Integritätsbereich und $K = \mathrm{Quot}(R)$ sein Quotientenkörper. R heißt *Bewertungsring*, falls $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$ für alle $x \in K$ gilt.

Aufgabe 4. (10 Punkte) Sei K ein Körper und $|\cdot|$ ein nichtarchimedischer Betrag auf K, der das Bild $|K| = \{2^k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. Sei $\pi \in K$ mit $|\pi| = 2^{-1}$ und $R = \{x \in K : |x| \leq 1\}$. Zeige, dass

(1) R ein Bewertungsring ist (mit $\mathrm{Quot}(R) = K$);
(2) R ein lokaler Ring mit $\mathcal{M} \coloneqq \{x \in R : |x| < 1\}$ dem maximale Ideal ist;
(3) $R^\times = \{x \in K : |x| = 1\}$;
(4) alle Ideale $I \neq (0)$ von R sind gegeben durch (π^k), $k \in \mathbb{N}$;
(5) jedes $x \in R \setminus \{0\}$ besitzt eine eindeutige Faktorisierung $x = \pi^k u$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $u \in R^\times$;

(Abgabe 27.04.22)