Bewertete Körper
Hausaufgabe 12

Aufgabe 1. (6 Punkte) Sei (K, v) ein bewertete Körper. Sei $(a_\lambda)_{\lambda<\kappa}$ eine Folge, sodass $(a_\lambda) \rightsquigarrow a$. Setze $\gamma_\lambda = v(a - a_\lambda)$ für $\lambda < \kappa$. Zeige, dass

(1) $(a_\lambda) \rightsquigarrow b$ gdw, $v(a - b) > \gamma_\lambda$ irgendwann;
(2) entweder $v(a_\lambda) < v(a)$ irgendwann oder $v(a_\lambda) = v(a)$ irgendwann.
(3) $(v(a_\lambda))_{\lambda<\kappa})$ ist irgendwann streng aufsteigend oder irgendwann konstant.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei (K, v) bewertete Körpern. Sei $(a_\lambda)_{\lambda<\kappa}$ eine pc-Folge. Zeige, dass $(v(a_\lambda))_{\lambda<\kappa})$ irgendwann streng steigend oder konstant wird.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $(K, v) \subseteq (L, w)$ eine Erweiterung von bewerteten Körpern. Sei $a \in L \setminus K$ und $\gamma \in \Gamma_v$. Für beliebige Element $b \in K$ schreibe $B^L_\gamma(a)$ für die offene Kugel von L. Falls $B^L_\gamma(a) \cap K \neq \emptyset$, zeige, dass es ein Element $b \in K$ gibt, sodass $B^L_\gamma(a) \cap K = B^K_\gamma(b)$.

Aufgabe 4. (6 Punkte) Sei $(K, v) \subseteq (L, w)$ eine Erweiterung von bewerteten Körper. Zeige, dass die folgenden aussagen äquivalent sind:

(1) Die Erweiterung ist unmittelbar.
(2) Für jedes Element $a \in L \setminus K$ hat die Menge
$$v(a - K) = \{v(a - x) : x \in K\}$$
kein maximales Element.

Hinweis:
Für $\Rightarrow$: Nutze Hausaufgabe 11 (3).
Für $\Leftarrow$: betrachte verschiedene Fallen:
Fall 1 : Es gibt $a \in L \setminus K$, sodass $v(a) \notin \Gamma_v$.
Fall 1.1 : $v(a) > \Gamma_v$, dann betrachte a^{-1}.
Fall 1.2 : $v(a) < \Gamma_v$, dann betrachte a.
Fall 1.3 : $A < v(a) < B$ für $A < B$ nicht leerere Menge, sodass $A \cup B = \Gamma_v$. Betrachte a.
Fall 2 : Angenommen $\Gamma_v = \Gamma_w$, und sei $a \in \mathcal{O}_w$, sodass $\operatorname{res}(a) \notin \bar{K}_v$. Betrachete a.

(Abgabe 06.07.22)