Bewertete Körper

Hausaufgabe 10

Ein bisschen Algebra zuerst:

Definition. Sei K ein Körper mit Charakteristik $p > 0$. Sei L/K eine Körpererweiterung. Ein Element $a \in L$ heißt *rein inseparable über* K, falls ein $a^{p^k} \in K$ für einige $k \in \mathbb{N}$. Die erweiterung heißt *rein inseparable*, falls jedes Element von L rein inseparable über K ist.

Aufgabe 1. (3 Punkte) Sei K ein Körper und $a \in K^{\text{alg}}$. Zeige, dass a separable ist genau dann, wenn das minimal Polynom P von a über K Koprim mit P' ist.

Aufgabe 2. (3 Punkte) Sei K ein Körper und $P \in K[x]$ ein irreduzibel Polynom. Zeige dass, entweder P und P' koprim sind oder $P' = 0$. Falls $P' = 0$ ist, zeige auch, dass

(1) $\text{char}\,(K) = p > 0$

(2) $P(X) = Q(x^q)$ mit $q = p^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ und $Q \in K[X]$ irreduzible, sodass Q und Q' Koprim sind.

(Hinweis: Für Teil (2) zeige zuerst, dass es ein irreduzibel Polynom $Q_1 \in K[X]$ gibt, sodass $P(X) = Q_1(X^p)$. Danach können Sie Induktion bei Grad nutzen.)

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Zeige, dass $(L \cap K^{\text{sep}})/K$ separable ist und $L/(L \cap K^{\text{sep}})$ rein inseparable ist. In besonders ist $K^{\text{alg}}/K^{\text{sep}}$ rein inseparable.

Jetzt gibt es noch Bewertete Körper.

Aufgabe 4. (5 Punkte) Sei (K, v) ein bewerteter helselscher Körper mit $\text{char}(K) = 0$. Zeige, dass die Menge

$$(K^*)^n = \{x \in K^* : (\exists y \in K)(x = y^n)\}$$

offen ist. (Hinweis: zeigen, dass für beliebiges $a \in (K^*)^n$, die offene Menge $B_{v(a)+2v(n)}(a)$ in $(K^*)^n$ enthalten ist.)

Aufgabe 5 (Krasnersatz (noch einmal!))**.** (5 Punkte) Sei (K, v) ein henselscher bewerteter Körper. Seien $a, b \in K^{\text{alg}}$ und $a_2, \ldots, a_n \in K^{\text{alg}}$ die zu a konjugierten Elementen (wobei alle a_i jeweils von a verschieden sind). Zeige, dass $K(a) \subseteq K(b)$ gilt, falls

$$v(a - b) > v(a - a_i) \text{ für } i = 2, \ldots, n\ .$$

(Hinweis: Angenommen nicht, sodass $[K(a, b) : K(b)] > 1$ gilt. Dann existiert $\sigma \in \text{Aut}(K^{\text{alg}}/K(b))$, sodass $\sigma(a) = a_i$ für einige $i \in \{2, \ldots, n\}$. Nutzen, dass: falls $c, c' \in K^{\text{alg}}$ Konjugiert über K sind, gilt $v(c) = v(c')$; in besonders, $v(b - a) = v(b - a_i)$).

Extra:

Aufgabe 6. * (4 Punkte) Gilt Aufgabe 4 auch für Körper, die Charakteristik $p > 0$ haben?

(Abgabe 22.06.22)