Coxetergruppen II, SoSe 2014

(Prof. Dr. O. Bogopolski)

5 Coxeter-Gruppen

5.1 Definitionen und Beispiele

Definition 5.1.1 Eine Gruppe W heißt *Coxeter-Gruppe*, falls ein endliches Erzeugersystem $S \subseteq W$ existiert, so dass W folgende Präsentation hat:

$$W = \langle S \,|\, (ss')^{m(s,s')} = 1 \;\; (s, s' \in S) \rangle,$$

wobei $m(s, s') \in \mathbb{N} \cup \infty$ ist und folgendes gilt:

- $m(s, s) = 1$ und $m(s, s') \geqslant 2$ für $s \neq s'$.
- Die Relation $(ss')^{m(s,s')} = 1$ wird gestrichen, falls $m(s, s') = \infty$ ist.

Definition 5.1.2 (a) Das Paar (W, S) heißt *Coxeter-System.*

(b) Der *Coxeter-Graph von* W bezüglich S ist ein markierter Graph $\Gamma = \Gamma(W, S)$, so dass folgendes gilt:

- Die Eckpunkte von Γ sind Elemente von S.
- Zwei Eckpunkte s, s' sind nur dann mit einer Kante verbunden, wenn $m(s, s') \geqslant 3$ ist.
- Wenn $m(s, s') \geqslant 4$ ist, dann markieren wir diese Kante mit $m(s, s')$. Die Kanten mit $m(\alpha, \beta) = 3$ werden nicht markiert.

Beispiele. 1) Ist $m(s, s') = \infty$ für alle $s \neq s'$, dann heißt die Coxeter-Gruppe

$$W = \langle S \,| s^2 = 1 \; (s \in S) \rangle$$

universelle Coxeter-Gruppe. Jede Coxeter-Gruppe ist ein homomorphes Bild einer universellen Coxeter-Gruppe.

2) Die Diheder-Gruppe D_n $(n \in \mathbb{N})$ ist die Symmetrie-Gruppe eines regularen n-Ecks. Die Diheder-Gruppe D_∞ ist die Symmetrie-Gruppe des unendlichen Graphs $\ldots — \circ — \circ — \circ — \circ — \ldots$ Diese Gruppen haben folgende Präsentationen:

$$\begin{aligned} D_n \;\; &= \langle s_1, s_2 \,|\, s_1^2 = s_2^2 = 1, (s_1 s_2)^n = 1 \rangle, \\ D_\infty \;\; &= \langle s_1, s_2 \,|\, s_1^2 = s_2^2 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

3) Wir betrachten die Coxeter-Gruppe

$$G = \langle s_1, s_2, s_3 \,|\, s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1, (s_1 s_2)^3 = 1, (s_1 s_3)^2 = 1 \rangle$$

und drei Matrizen in $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Abbildung $s_1 \mapsto A$, $s_2 \mapsto B$, $s_3 \mapsto C$ kann bis zu einem Isomomorphismus $\phi : G \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ erweitert werden.

Proposition 5.1.3 Es existiert ein Epimorphismus

$$\begin{aligned}\epsilon: \quad & W \to \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\} \\ & s \mapsto -1 (s \in S).\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\mathrm{Ord}(s) = 2$.

5.2 Länge-Funktion

Sei $W = \langle S \mid (ss')^{m(s,s')} = 1 \ \ (s, s' \in S) \rangle$ eine Coxeter-Gruppe.

Definition 5.2.1 Da $s^2 = 1$ für alle $s \in S$ gilt, kann jedes Element $w \in W$ in der Form $w = s_1 s_2 \dots s_r$ mit $s_1, \dots, s_r \in S$ geschrieben werden. Die minimale r heißt *Länge* von w und wird mit $l(w)$ bezeichnet.

Lemma 5.2.2 Für alle $w, w' \in W$ und für alle $s \in S$ gilt:

(L1) $l(w) = l(w^{-1})$,

(L2) $l(w) = 1 \Leftrightarrow w \in S$,

(L3) $l(ww') \leqslant l(w) + l(w')$,

(L4) $l(ww') \geqslant l(w) - l(w')$,

(L5) $l(w) - 1 \leqslant l(w) \leqslant l(w) + 1$.

Proposition 5.2.3 Für alle $w, w' \in W$ und für alle $s \in S$ gilt $l(ws) = l(w) \pm 1$.

5.3 Geometrische Darstellung von W

Sei $W = \langle S \mid (ss')^{m(s,s')} = 1 \ \ (s, s' \in S) \rangle$ eine Coxeter-Gruppe.

- Wir betrachen den Vektorraum V über $\mathbb{R}$ mit der Basis $\{\alpha_s \mid s \in S\}$.
- Auf V definieren wir eine bilineare Form $B : V \times V \to \mathbb{R}$:

$$B(\alpha_s, \alpha_{s'}) := -\cos\Big(\frac{\pi}{m(s, s')}\Big).$$

- Für jedes $s \in S$ definieren wir eine Hyperebene

$$H_s := \{x \in V \mid B(x, \alpha_s) = 0\}$$

  und eine lineare Transformation $\sigma_s : V \to V$

$$\sigma_s(u) := u - 2B(u, \alpha_s)\alpha_s.$$

Lemma 5.3.1 Es gilt:
1) $V = \mathbb{R}\alpha_s \oplus H_s$,
2) $\sigma_s(\alpha_s) = -\alpha_s$ und $\sigma_s(h) = h$ für $h \in H_s$,
3) $\sigma_s^2 = 1$.

Lemma 5.3.2 Für alle $s \in S$ ist die Form $B(\cdot, \cdot)$ σ_s-invariant.
Das heißt: für alle $s \in S$ und alle $v, u \in V$ gilt

$$B(\sigma_s(v), \sigma_s(u)) = B(v, u).$$

Lemma 5.3.3 Seien s, s' zwei verschiedene Elemente aus S und sei $V_{s,s'} := \mathbb{R}\alpha_s \oplus \mathbb{R}\alpha_{s'}$. Dann gilt:

1) Die Einschränkung $B|_{V_{s,s'}}$ ist positiv halbdefinit ($B(v, v) \geqslant 0$).
2) Die Einschränkung $B|_{V_{s,s'}}$ ist nicht singular ($B(v, v) \neq 0 \Leftrightarrow v \neq 0$) genau dann, wenn $m < \infty$ ist.

Bemerkung. Ist $m(s, s') = \infty$, dann gilt $B(v, v) = 0$ für $v = \alpha_s + \alpha_{s'}$.

Lemma 5.3.4 Es gilt $(\sigma_s \sigma_{s'})^{m(s,s')} = \mathrm{id}$ auf V.

Korollar 5.3.5 Sei $W = \langle S \,|\, (ss')^{m(s,s')} = 1 \;\; (s, s' \in S)\rangle$ eine Coxeter-Gruppe.

1) Die Abbildung $S \to \mathrm{GL}(V)$, $s \mapsto \sigma_s$ kann bis zu einem Homomorphismus

$$\sigma : W \to \mathrm{GL}(V)$$

erweitert werden[1] .

2) $\mathrm{Ord}(ss') = m(s, s')$.

3) Die Gruppe W erhält die Form $B(\cdot, \cdot)$, d.h.: für alle $w \in W$ und für alle $u, v \in V$ gilt

$$B(w(v), w(u)) = B(v, u).$$

5.4 Wurzelsystem für W und eine Einbettung von W in GL(V)

Sei $W = \langle S \,|\, (ss')^{m(s,s')} = 1 \;\; (s, s' \in S)\rangle$ eine Coxeter-Gruppe.

Definition 5.4.1 Das *Wurzelsystem* für W ist die folgende Teilmenge von V:

$$\Phi := \{w(\alpha_s) \,|\, w \in W, s \in S\}.$$

Bemerkung. Es gilt

1) $||v|| = 1$ für alle $v \in \Phi$;

2) $\Phi = -\Phi$;

3) $W\Phi = \Phi$.

[1]Das ermöglicht zu sagen, dass W auf V durch lineare Transformationen operiert. Wir schreiben $w(v)$ statt $\sigma(w)(v)$.

Definition 5.4.2 Jedes $\alpha \in \Phi$ kann eindeutig in der Form $\alpha = \sum\limits_{s \in S} c_s \alpha_s$ mit $c_s \in \mathbb{R}$ geschrieben werden. Der Vektor α heißt *positiv*, falls $c_s \geqslant 0$ für alle $s \in S$ ist. Der Vektor α heißt *negativ*, falls $c_s \leqslant 0$ für alle $s \in S$ ist. Wir schreiben $\alpha \succ 0$, falls α positiv ist, und wir schreiben $\alpha \prec 0$, falls α negativ ist. Wir setzen

$$\Phi^+ := \{\alpha \in \Phi \,|\, \alpha \succ 0\}, \quad \Phi^- := \{\alpha \in \Phi \,|\, \alpha \prec 0\}.$$

Bemerkung. Später werden wir beweisen, dass $\Phi = \Phi^+ \bigsqcup \Phi^-$ ist.

Definition 5.4.3 Für jede Teilmenge $I \subseteq S$ definierern wir

$$W_I := \langle s \,|\, s \in I \rangle.$$

Die Untergruppen von W, die die Form wW_Iw^{-1} haben ($w \in W$, $I \subseteq S$), heißen *parabolische* Untergruppen von W.

Lemma 5.4.4 Für je $w \in W$ und $s \in S$ gilt:

1) Ist $l(ws) > l(w)$, dann gilt $w(\alpha_s) \succ 0$.
2) Ist $l(ws) < l(w)$, dann gilt $w(\alpha_s) \prec 0$.

Korollar 5.4.5 Sei $W = \langle S \,|\, (ss')^{m(s,s')} = 1 \;\; (s, s' \in S) \rangle$ eine Coxeter-Gruppe.
Der Homomorphismus

$$\begin{aligned} \sigma :\ & W \to \mathrm{GL}(V), \\ & s \mapsto \sigma_s \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

5.5 Fundamentalbereich für eine Coxeter-Gruppe

Definition 5.5.1 Sei $W = \langle S \,|\, s^2 = 1, (ss')^{m(s,s')} = 1 \;\; (s, s' \in S) \rangle$ eine Coxeter-Gruppe und sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $\{\alpha_s \,|\, s \in S\}$. Nach Korollar 5.3.5 operiert W auf V wie folgt:

$$s(v) = v - 2B(v, \alpha_s)\alpha_s \quad (s \in S, v \in V).$$

Wir betrachten den Dualraum

$$V^* := \{f : W \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist linear}\}$$

und definieren eine Operierung von W auf V^* durch die Formel

$$w(f)(v) = f(w^{-1}(v)) \quad (w \in W, f \in V^*, v \in V).$$

Nun haben wir zwei Operierungen (die direkte und die kontragradiente):

$$\begin{aligned} \sigma \quad & : W \to \mathrm{GL}(V), \\ \sigma^* \quad & : W \to \mathrm{GL}(V^*). \end{aligned}$$

Bemerkung:
1) Es gilt $(w_1w_2)(f) = w_1(w_2(f))$.
2) Die beiden Operierungen sind treu: $\mathrm{Ker}(\sigma) = \mathrm{Ker}(\sigma^*) = 1$.

Definition 5.5.2 Wir definieren eine *Paarung*:

$$\begin{array}{ll} V^* \times V & \to \mathbb{R} \\ (f, v) & \mapsto \langle f, v \rangle, \end{array}$$

wobei $\langle f, v\rangle := f(v)$ ist.

Bemerkung. Für alle $w \in W$, $f \in V^*$ und $v \in V$ gilt $\langle w(f), w(v)\rangle = \langle f, v\rangle$.

Definition 5.5.3 Für jedes $s \in S$ definieren wir eine Hyperebene und zwei offene Halbräume in V^*:

$$\begin{array}{ll} Z_s : & = \{f \in V^* \mid \langle f, \alpha_s\rangle = 0\}, \\ A_s^+ : & = \{f \in V^* \mid \langle f, \alpha_s\rangle > 0\}, \\ A_s^- : & = \{f \in V^* \mid \langle f, \alpha_s\rangle < 0\}. \end{array}$$

Lemma 5.5.4 Jeder Erzeuger $s \in S$ fixiert Z_s punktweise und tauscht A_s^- und A_s^+ um.

Definition 5.5.5 Sei I eine beliebige Teilmenge von S. Wir definieren folgende Bereiche in V^*:

$$\begin{array}{ll} C : & = \bigcap\limits_{s \in S} A_s^+, \\ C_I : & = \big(\bigcap\limits_{s \in I} Z_s\big) \cap \big(\bigcap\limits_{s \notin I} A_s^+\big), \\ & = \{f \in V^* \mid \ \langle f, \alpha_s\rangle = 0 \text{ für alle } s \in I, \\ & \qquad\qquad\quad \langle f, \alpha_s\rangle > 0 \text{ für alle } s \in S \setminus I\}, \\ D : & = \overline{C} \\ & = \{f \in V^* \mid \ \langle f, \alpha_s\rangle \geqslant 0 \text{ für alle } s \in S\}. \end{array}$$

Bemerkung. Es gilt:

1) $C_\emptyset = C$ und $C_S = \emptyset$,

2) $D = \coprod\limits_{I \subseteq S} C_I$,

3) D ist ein konvexer Kegel und heißt *Tits-Kegel* für W.

Lemma 5.5.6 1) Die parabolische Untergruppe $W_I := \langle s'' \mid s'' \in S\rangle$ fixiert C_I punktweise.
2) Sei $s \in S$. Wenn s ein f aus C_I fixiert, dann gilt $s \in I$.

Lemma 5.5.7 Für $s \in S$ und $w \in W$ gilt:

$$l(sw) > l(w) \Leftrightarrow w(C) \subseteq A_s^+,$$

$$l(sw) < l(w) \Leftrightarrow w(C) \subseteq A_s^-.$$

Satz 5.5.8 Für jede Coxeter-Gruppe W gilt:

(a) Sei $w \in W$ und seien $I, J \subseteq S$.
Ist $w(C_I) \cap C_J \neq \emptyset$, dann ist $I = J$ und $w \in W_I$.
Insbesondere gilt $\mathrm{St^*}_W(C_I) = W_I$.

(b) D ist ein Fundamentalbereich für die Operierung von W auf $U := \bigcup\limits_{w \in W} w(D)$:
(für alle $u \in U$ existiert ein eindeutiges $d \in D$ mit $d = w(u)$ für ein $w \in W$;
dieses w ist aber nicht immer eindeutig).

(c) Der Kegel U ist konvex. Jede geschlossene Strecke in U schneidet sich nur mit endlich vielen Elementen der Menge $\mathcal{C} := \{wC_I \mid w \in W,\, I \subseteq S\}$.

Korollar 5.5.9 Für $U := \bigcup\limits_{w \in W} w(D)$ gilt

$$U = \bigcup_{\substack{w \in W \\ I \subseteq S}} wC_I = \coprod_{\substack{w \in \mathrm{Rep}(W/W_I) \\ I \subseteq S}} wC_I,$$

wobei $\mathrm{Rep}(W/W_I)$ die Menge der Repräsentanten der linken Nebenklassen von W_I in W ist.

6 Spezialfälle von Coxeter-Gruppen

6.1 Topologische Grundlagen

Definition 6.1.1 Eine Teilmenge M eines topologischen Raumes X heißt *diskret*, falls jeder Punkt $m \in M$ eine Umgebung $O(m)$ besitzt, so dass $O(m) \cap M = \{m\}$ ist.

Satz 6.1.2 Jede diskrete und abgeschlossene Teilmenge M eines kompakten topologischen Raumes X ist endlich.

Beweis. Für jedes $m \in M$ sei $O(m)$ eine Umgebung von m in X mit $O(m) \cap M = \{m\}$. Dann ist

$$X = (X \setminus M) \cup (\bigcup_{m \in M} O(m))$$

eine Überlagerung von X mit offenen Mengen. Da X kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $M_0 \subseteq M$ mit

$$X = (X \setminus M) \cup (\bigcup_{m \in M_0} O(m)).$$

Dann gilt

$$M = (\bigcup_{m \in M_0} O(m)) \cap M = \bigcup_{m \in M_0} (O(m) \cap M) = M_0.$$

Definition 6.1.3 Eine Gruppe G, die gleichzeitig ein topologischer Raum ist, heißt *topologische Gruppe*, falls die Abbildungen $\cdot : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$ und $^{-1} : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ stetig sind.

Satz 6.1.4 Jede diskrete Untergruppe H einer Hausdorffschen topologischen Gruppe G ist abgeschlossen.

Beweis. Sei $h_1, h_2, \dots$ eine Folge von Elementen aus H, die gegen ein $g \in G$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass g in H liegt.

Es ist klar, dass die Folge $h_1 g^{-1}, h_2 g^{-1}, \dots$ gegen 1 konvergiert. Dann gilt: Für jede Umgebung U von 1 existiert eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(U)$, so dass $h_n g^{-1} \in U$ für alle $n \geqslant n_0$ ist.

Sei V eine beliebige Umgebung von 1. Dann existiert eine Umgebung U von 1 mit $U \cdot U^{-1} \subseteq V$. Dann gilt $h_k g^{-1} \cdot (h_l g^{-1})^{-1} = h_k h_l^{-1} \in V$ für alle $k, l \geqslant n_0$.

Da $1 \in H$ ist und H diskret in G ist, existiert eine Umgebung V von 1, so dass $V \cap H = \{1\}$ ist. Dann gilt $h_k h_l^{-1} = 1$ für alle $k, l \geqslant n_0$. Also gilt $h_k = h_l$ für alle $k, l \geqslant n_0$. Wir bezeichnen dieses Element mit h. Dann ist $h \in H$ und die Folge $h_1, h_2, \dots$ konvergiert gegen h. In jedem Hausdorffschen Raum ist aber Limes einer Folge eindeutig. Deswegen gilt $g = h \in H$.

Folgerung 6.1.5 Jede diskrete Untergruppe H einer Hausdorffschen kompakten topologischen Gruppe G ist endlich.

Folgerung 6.1.6 Jede diskrete Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(n)$ ist endlich.

6.2 Ein Satz über $\sigma(W)$

Satz 6.2.1 $\sigma^*(W)$ ist eine diskrete Untergruppe von $\mathrm{GL}(V^*)$.

Beweis. Angenommen $\sigma^*(W)$ ist in $\mathrm{GL}(V^*)$ nicht diskret. Dann existiert eine Folge verschiedener Elemente $w_1, w_2, \dots$ aus W, so dass die Transformationen $\sigma^*(w_i)$ gegen die identische Transformation id konvergieren. Dann gilt

$$\sigma^*(w_i)(f) \to \mathrm{id}(f) = f$$

für alle $f \in V^*$.

Sei $f_0 \in C$, wobei die offene Menge $C \subset V^*$ in Definition 5.5.5 definiert wurde. Dann existiert n_0, so dass für $i \geqslant n_0$ gilt:

$$\sigma^*(w_i)(f_0) \in C.$$

Da $f_0 \in C$ ist, folgt aus dem Satz 5.5.8. (b)

$$\sigma^*(w_i)(f_0) = f_0.$$

Dann gilt

$$\sigma^*(w_i)|_C = \mathrm{id}|_C.$$

Da C eine offene Menge ist, ist

$$\sigma^*(w_i) = \mathrm{id}.$$

Dann ist $w_i = 1$ für alle $i \geqslant n_0$. Ein Widerspruch. □

Satz 6.2.2 $\sigma(W)$ ist eine diskrete Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$.

Beweis. Wir betrachten die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned}\theta: \quad & \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V^*) \\ & t \mapsto (f \mapsto f \circ t^{-1}).\end{aligned}$$

Die Abbildung θ is stetiger Isomorphismus. Außerdem gilt

$$\sigma^*(w) = (f \mapsto f \circ ((\sigma(w)^{-1}))) = \theta(\sigma(w)).$$

Daraus folgt

$$\sigma^* = \theta \circ \sigma.$$

Wäre $\sigma(W)$ nicht diskret in $\mathrm{GL}(V)$, dann wäre auch $\sigma^*(W)$ nicht diskret in $\mathrm{GL}(V^*)$. □

Zu Erinnerung. Die Form $B : V \times V \to \mathbb{R}$ wurde so definiert:

$$B(\alpha_s, \alpha_{s'}) := -\cos\Big(\frac{\pi}{m(s,s')}\Big). \tag{1}$$

Satz 6.2.3 Ist die Form B positiv definit, dann ist W endlich.

Beweis. Mit der positiv definiten Form B ist V ein Euklidscher Raum. Nach Korollar 5.3.5. 3) gilt

$$B(\sigma(w)(u), \sigma(w)(v)) = B(u,v)$$

für alle $w \in W$ und $u, v \in V$. Das bedeutet, dass $\sigma(w)$ eine orthogonale Abbildung von V ist. Also gilt $\sigma(W) \subset \mathbb{O}(V)$. Da $\sigma(W)$ eine diskrete Untergruppe in $\mathbb{O}(V)$ ist, ist $\sigma(W)$ endlich.

6.3 Radikal einer bilinearen Form

Definition 6.3.1 Sei B eine beliebige Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V.
Die Menge

$$\mathrm{Rad}(B) := \{v \in V \mid B(v,x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}$$

heißt *Radikal* der Bilinearform B. Die Form B heißt *singular*, falls $\mathrm{Rad}(B) \neq \{0\}$ ist. Die Form B heißt *positiv definit*, falls $B(v,v) > 0$ für alle $v \neq 0$ ist. Es ist klar, dass die positiv definiten Formen nicht-singular sind.

Bemerkung. Sei (W, S) ein Coxeter-Paar. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $\{\alpha_s \mid s \in S\}$. Sei B die Bilinearform auf V, die mit Formel (1) gegeben ist. Bezeichne

$$H_s := \{v \in V \mid B(v, \alpha_s) = 0\}.$$

Dann gilt

$$\mathrm{Rad}(B) = \bigcap_{s \in S} H_s.$$

Daraus und aus Lemma 5.3.1.2) folgt:

Behauptung. Der Untervektorraum $\mathrm{Rad}(B)$ von V ist punktweise fixiert von W.

Lemma 6.3.2 Für jedes $s \in S$ gilt: $V = \mathrm{Eig}(\sigma_s, 1) \oplus \mathrm{Eig}(\sigma_s, -1) = H_s \oplus \langle \alpha_s \rangle$.

Beweis folgt aus Lemma 5.3.1.

Lemma 6.3.3 Sei (W, S) ein irreduzibles Coxeter-System. Dann gilt:

(a) Ist $V_1 \subsetneqq V$ ein W-invarianter Untervektorraum, dann gilt $V_1 \subseteq \mathrm{Rad}(B)$.

(b) Ist $\mathrm{Rad}(B) \neq \{0\}$, dann ist das W-Modul V nicht vollständig reduzibel.[2]

(c) Ist $\mathrm{Rad}(B) = \{0\}$, dann ist das W-Modul V irreduzibel.[3]

(d) Sei $\phi \in \mathrm{End}(V)$, so dass $\phi w = w \phi$ für alle $w \in W$ gilt. Dann ist $w = c \cdot \mathrm{id}$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. (a) *Fall 1.* Angenommen $\alpha_s \notin V_1$ für alle $s \in S$.
Wir betrachten $\sigma_s|_{V_1}$. Da V_1 σ_s-invariant ist und $\sigma_s^2 = \mathrm{id}$ ist, haben wir

$$V_1 = \mathrm{Eig}(\sigma_s|_{V_1}, 1) \oplus \mathrm{Eig}(\sigma_s|_{V_1}, -1).$$

Wäre $\mathrm{Eig}(\sigma_s|_{V_1}, -1) \neq \{0\}$, dann hätten wir $\mathrm{Eig}(\sigma_s|_{V_1}, -1) = \langle \alpha_s \rangle$ nach Lemma 6.3.2. Das widerspricht aber unserer Annahme. Also gilt

$$V_1 = \mathrm{Eig}(\sigma_s|_{V_1}, 1) \subseteq H_s$$

für alle $s \in S$. Dann ist V_1 eine Teilmenge von $\bigcap\limits_{s \in S} H_s = \mathrm{Rad}(B)$.

Fall 2. Angenommen $\alpha_s \in V_1$ für ein $s \in S$.
Da der Coxeter-Graph von (W, S) zusammenhängend ist, existiert ein benachbarter zu s Erzeuger $t \in S \setminus \{s\}$. Wir haben $m(s, t) \geqslant 3$, deswegen gilt $B(\alpha_s, \alpha_t) \neq 0$. Dann gilt:

$$V_1 \supseteq \sigma_t(V_1) \ni \sigma_t(\alpha_s) = \alpha_s - 2B(\alpha_s, \alpha_t) \cdot \alpha_t$$

und somit gilt $\alpha_t \in V_1$. Per Induktion erhalten wir, dass alle $\alpha_{s'}$ $(s' \in S)$ in V_1 liegen. Dann gilt $V_1 = V$. Ein Widerspruch.

(b) Der Untervektorraum $V_1 := \mathrm{Rad}(B)$ hat keinen komplementären W-invarianten Vektorraum V_2.

(c) folgt aus (a).

(d) Sei $s \in S$. Da $\sigma_s \phi = \phi \sigma_s$ ist, ist $\mathrm{Eig}(\sigma_s, -1) = \langle \alpha_s \rangle$ ϕ-Invariant. Dann gilt $\phi(\alpha_s) = c\alpha_s$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Betrachte $V_1 := \mathrm{Ker}(\phi - c \cdot \mathrm{id})$. Merken wir an: V_1 ist W-invariant und enthält α_s. Aber $\alpha_s \notin \mathrm{Rad}(B)$, weil $B(\alpha_s, \alpha_s) = 1$ ist. Nach (a) gilt $V = V_1$. Daraus folgt $\phi = c \cdot \mathrm{id}$. □

[2] W-Modul V heißt *vollstandig reduzibel*, falls für jeden W-invarianten Untervektorraum V_1 in V ein W-invarianter Untervektorraum V_2 mit $V = V_1 \oplus V_2$ existiert.

[3] W-Modul V heißt *irreduzibel*, falls kein W-invarianter Untervektorraum von V, außer V und $\{0\}$ existiert.

6.4 Endliche Coxeter-Gruppen

Lemma 6.4.1 Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Gruppendarstellung[4], wobei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Dann gilt:

(a) Ist G endlich, dann existiert eine G-invariante und positiv definite symmetrische Bilinearform auf V.

(b) (Maschke) Ist G endlich, dann ist ρ vollständig reduzibel.

(c) *Angenommen*: Die einzigen Endomorphismen von V, die mit allen Elementen von $\rho(G)$ kommutieren sind Skalarendomorphismen.
Dann gilt: je zwei G-invariante symmetrische nichtsingulare[5] Bilinearformen β und β' auf V unterscheiden sich nur um einen Faktor aus $\mathbb{R}$.

Beweis.
(a) Sei β eine beliebige positiv definite symmetrische Bilinearform auf V. Zum Beispiel: Wir fixieren eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ von V und definieren $\beta(\sum_{i=1}^n a_i e_i, \sum_{i=1}^n b_i e_i) := \sum_{i=1}^n a_i b_i$. Wir definieren eine andere Bilinearform $\overline{\beta}$ auf V durch

$$\overline{\beta}(u,v) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \beta(g(v), g(u)),$$

wobei wir immer $g(v)$ statt $\rho(g)(v)$ schreiben. Diese Form $\overline{\beta}$ ist G-invariant, positiv definit und symmetrisch.

(b) Sei $V_1 \subseteq V$ ein G-invarianter Untervektorraum. Wir müssen einen G-invarianten Untervektorraum V_2 finden, so dass $V = V_1 \oplus V_2$ gilt. Als V_2 gilt die orthogonale Komplement zu V_1 bezüglich das Skalarprodukts $\overline{\beta}$:

$$V_2 := \{v \in V \mid \overline{\beta}(v,x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}.$$

(c) Das wird eine Aufgabe im Übungsblatt 5. □

Satz 6.4.2 Eine Coxeter-Gruppe W ist genau dann endlich, wenn die assoziierte Bilinearform B positiv definit ist.

Beweis. Die Richtung $\Leftarrow$ wurde im Satz 6.2.3 bewiesen.
$\Rightarrow$: Sei W endlich. O.B.d.A. ist W irreduzibel. Dann gilt:
- Die Darstellung $\sigma : W \to \mathrm{GL}(V)$ ist vollständig reduzibel (Lemma 6.4.1.(b)).
- $\mathrm{Rad}(B) = 0$ (Lemma 6.3.3.(b)). Insbesondere ist B nicht singular.
- Sei $\overline{B}$ die positiv definite und W-invariante Bilinearform aus Lemma 6.4.1.(a).
- $B = c \cdot \overline{B}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ (Lemma 6.4.1.(c) und Lemma 6.3.3.(d)).
- Da $\overline{B}$ positiv definit ist und $B(\alpha_s, \alpha_s) = 1$ ist, ist $c > 0$ und somit ist B auch positiv definit. □

[4] ρ ist ein Gruppenhomomorphismus.
[5] Eine Bilinearform β heißt *singilar*, falls $\mathrm{Rad}(\beta) = \{0\}$ ist.

Die Liste von "irreduziblen" endlichen Coxeter-Gruppen

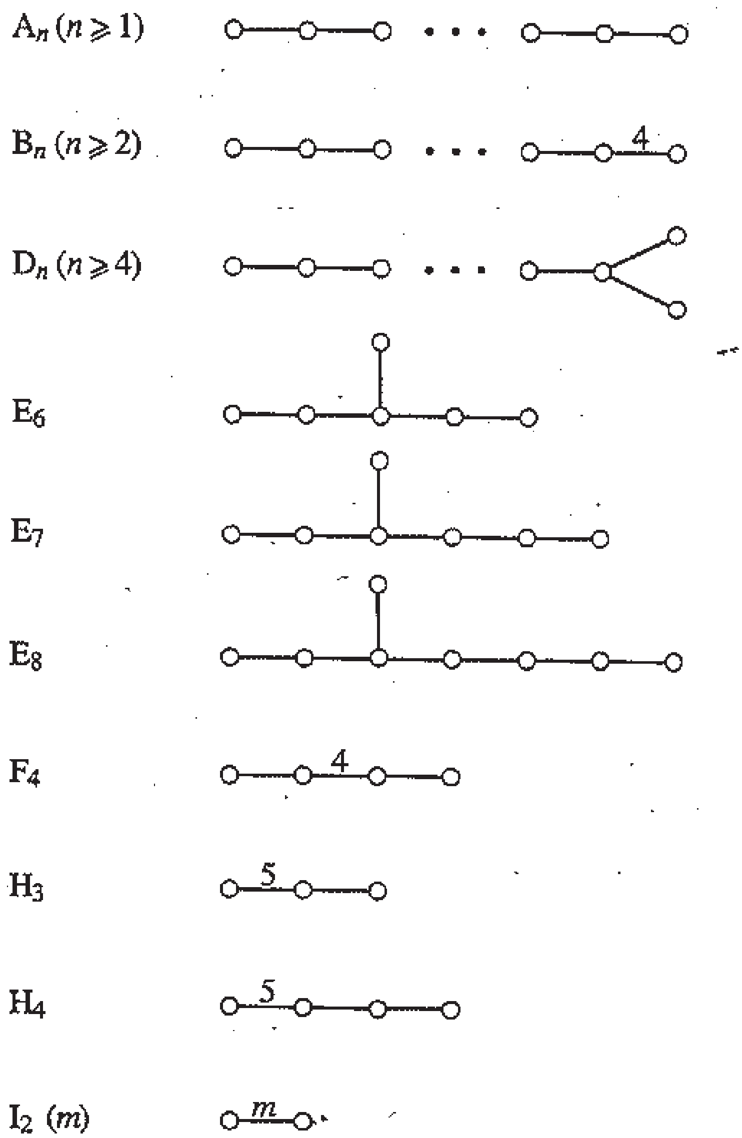


Tabelle 1

6.5 Kristallographische Coxeter-Gruppen

Sei $W = \langle S \mid (ss')^{m(s,s')} = 1 \ (s, s' \in S) \rangle$ eine Coxeter-Gruppe. Wir betrachten die Operierung von W auf dem Verktorraum $V = \bigoplus_{\alpha \in S} \alpha_s \mathbb{R}$ durch Lineartransformationen wie im Korollar 5.4.5:

$$\sigma : W \to \mathrm{GL}(V).$$

Definition 6.5.1 Eine Coxeter-Gruppe Gruppe W heißt *kristallographisch*, falls ein volles[6] $\sigma(W)$-invariantes Gitter L in V existiert.

Lemma 6.5.2 Ist W kristallographisch, dann ist $\mathrm{Spur}(\sigma(w)) \in \mathbb{Z}$ für alle $w \in W$.

Beweis. Sei $L = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i \mathbb{Z}$. Da L invariant bezüglich $\sigma(w)$ ist, ist die Darsellungsmatrix von $\sigma(w)$ in der Basis e ganzzahlig.

Bezeichnungen. Sei $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Wir schreiben
- α_i statt α_{s_i}
- $w(v)$ statt $\sigma(w)(v)$.
- $m_{i,j}$ statt $m(s_i, s_j)$.

Sei

$$b_{i,j} := -2B(\alpha_i, \alpha_j) = -2\cos\Big(\frac{\pi}{m_{i,j}}\Big).$$

Aus der Definition von σ haben wir

$$s_i(\alpha_j) = \alpha_i + b_{i,j}\alpha_j.$$

Lemma 6.5.3 Sei W kristallographisch. Dann gelten
1) $b_{i,j}^2 \in \mathbb{Z}$ für alle $i \neq j$.
2) $b_{i,j} b_{j,l} \ldots b_{k,i} \in \mathbb{Z}$ für jeden Zyklus $(s_i, s_j, s_l, \ldots, s_k)$ im Coxeter-Graph $\Gamma(W, S)$.

Beweis. 1) Wir haben

$$\begin{aligned} s_1 s_2(\alpha_1) &= s_1(\alpha_1 + b_{21}\alpha_2) \\ &= -\alpha_1 + b_{21}(\alpha_2 + b_{12}\alpha_1) \\ &= (-1 + b_{12}^2)\alpha_1 + b_{21}\alpha_2, \end{aligned}$$

$$s_1 s_2(\alpha_2) = s_1(\alpha_2) = -(\alpha_2 + b_{12}\alpha_1),$$

$$s_1 s_2(\alpha_k) = \alpha_k \ \ (\bmod \mathrm{Span}\{\alpha_1, \alpha_2\})$$

für $k > 2$. Dann ist

$$\mathrm{Spur}(s_1 s_2) = b_{12}^2 + n.$$

Nach Lemma 6.5 gilt $b_{12}^2 \in \mathbb{Z}$. Analog gilt $b_{i,j}^2 \in \mathbb{Z}$ für alle $i \neq j$.

2) folgt aus der Berechnung von $\mathrm{Spur}(s_i s_j s_l \ldots s_k)(\alpha_t)$ für $t = 1, \ldots, n$. Als Beispiel, ist es nützlich, ein Dreieck-Zyklus (s_1, s_2, s_3) zu betrachten. □

[6] $\dim_{\mathbb{Z}} L = \dim_{\mathbb{R}} V$.

Satz 6.5.4 Eine Coxeter-Gruppe W ist kristallographisch genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) Es gilt $m_{i,j} \in \{2, 3, 4, 6, \infty\}$ für alle $i \neq j$.
2) In jedem Kreis von $\Gamma(W, S)$ ist die Anzahl von Kanten mit $m_{i,j} = 4$ und mit $m_{i,j} = 6$ gerade.

Beweis. Nehmen wir an, dass W kristallographisch ist und beweisen wir 1) und 2).
1) Nach Lemma 6.5.3.1) gilt $b_{ij}^2 \in \mathbb{Z}$ für alle $i \neq j$. Das ist äquivalent zu:

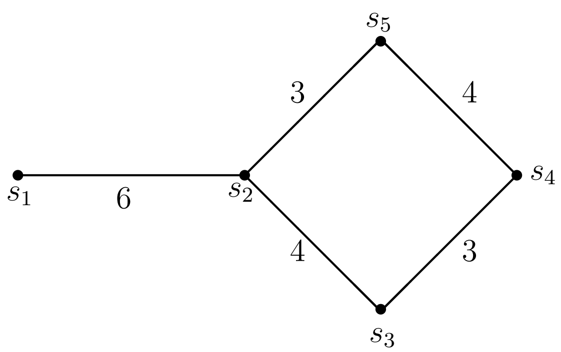
$$\begin{aligned}
\cos^2(\tfrac{\pi}{m_{ij}}) &\in \{0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}, 1\}, \\
\cos(\tfrac{\pi}{m_{ij}}) &\in \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\}, \\
\tfrac{\pi}{m_{ij}} &\in \{\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{6}, 0\}, \\
m_{ij} &\in \{2, 3, 4, 6, \infty\}.
\end{aligned}$$

2) folgt direkt aus Lemma 6.5.3.2).

Jetzt nehmen wir an, dass 1) und 2) für W gelten und beweisen, dass W kristallographisch ist. Aus 2) folgt, dass Zahlen c_s $(s \in S)$ existieren, die die folgende Bedingung für $i \neq j$ erfüllen:

$$\begin{aligned}
m_{i,j} = 3 \quad &\Rightarrow c_i = c_j, \\
m_{i,j} = 4 \quad &\Rightarrow c_i = \sqrt{2}c_j \text{ oder } c_j = \sqrt{2}c_i, \\
m_{i,j} = 6 \quad &\Rightarrow c_i = \sqrt{3}c_j \text{ oder } c_j = \sqrt{3}c_i, \\
m_{i,j} = \infty \quad &\Rightarrow c_i = c_j.
\end{aligned}$$

Beispiel:



Hier können wir $c_1 = 1$, $c_2 = \sqrt{3}$, $c_3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$, $c_4 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$, $c_5 = \sqrt{3}$ setzen.

Wir definieren $L := \bigoplus_{i=1}^{n} (c_i\alpha_i)\mathbb{Z}$. Es ist leicht zu beweisen, dass das Gitter L invariant bezüglich W ist. Also ist W kristallographisch. $\square$

6.6 Gruppe von affinen Spiegelungen

Definition 6.6.1 1) Die Translation des Raumes um einen Vektor $v \in V$ ist die Abbildung

$$t(v): \begin{array}{l} V \to V, \\ x \mapsto x + v. \end{array}$$

2) Die Gruppe der Translationen des Raumes V ist

$$T(V) := \{t(v) \mid v \in V\}.$$

3) Die Gruppe der *affinen Transformationen* von V ist

$$\mathrm{Aff}(V) := T(V) \rtimes \mathrm{GL}(V).$$

Bemerkung 1. Für $g \in \mathrm{GL}(V)$ und $v \in V$ gilt $g \circ t(v) \circ g^{-1} = t(g(v))$.

Erinnerung. Sei (W, S) ein Coxeter-Paar. Wir bezeichnen $\Delta := \{\alpha_s \mid s \in S\}$. Die Menge $\Phi := W(\Delta)$ heißt *Wurzelsystem* für W.

Definition 6.6.2 Sei W eine endliche Coxeter-Gruppe. Sei Φ ihr Wurzelsystem in V.

1) Mit der Bezeichnung

$$\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}.$$

heißt die Menge

$$\Phi^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}$$

Co-Wurzelsystem von W.

2) Sei L das $\mathbb{Z}$-Modul, das von $\Phi^\vee$ erzeugt ist:

$$L = \sum_{\alpha^\vee \in \Phi^\vee} \alpha^\vee \mathbb{Z}.$$

Die Gruppe der Translationen entlang des $\mathbb{Z}$-Moduls L ist

$$T(L) = \{t(v) \mid v \in L\}.$$

Satz 6.6.3 Sei W eine endliche Coxeter-Gruppe und sei Φ ihr Wurzelsystem. Dann gilt:

1) Das mit Φ assoziierte $\mathbb{Z}$-Modul L ist W-invariant.
2) Das $\mathbb{Z}$-Modul L ist ein Gitter in V für alle irreduziblen W außer H_3, H_5 und $I_2(m)$ mit $m = 5$ und $m \geqslant 7$ (siehe Tabelle 1).

Definition 6.6.4 Für $\alpha \in \Phi$ und $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir eine affine Hyperebene:

$$H_{\alpha,k} := \{v \in V \mid (v, \alpha) = k\}$$

und eine Abbildung:

$$s_{\alpha,k} := t(k\alpha^\vee) \circ s_\alpha.$$

Lemma 6.6.5 Es gilt:
1) $H_{\alpha,k} = H_{\alpha,0} + \frac{k}{2}\alpha^\vee$;
2) $s_{\alpha,k}$ ist eine Spiegelung um $H_{\alpha,k}$;

Definition 6.6.6 Sei W eine endliche Weyl-Gruppe (= eine endliche Coxeter-Gruppe) und sei Φ ihr Wurzelsystem in V. Wenn das mit Φ assoziierte $\mathbb{Z}$-Modul L ein Gitter ist (siehe Satz 6.6.3), dann heißt die Gruppe

$$W_a = \langle s_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}\rangle$$

affine Weyl-Gruppe für W.

Satz 6.6.7 Sei (W, S) ein Coxeter-Paar mit endlicher Coxeter-Gruppe W. Wenn das mit Φ assoziierte $\mathbb{Z}$-Modul L ein Gitter ist (siehe Satz 6.6.3), dann gilt:

1) $W_a = T(L) \rtimes W$.
2) W_a ist eine Coxeter-Gruppe.
3) Ist (W, S) irreduzibel, dann existiert eine Wurzel $\widetilde{\alpha} \in \Phi$, so dass (W_a, S_a) ein irreduzibles Coxeter-Paar mit
$$S_a := S \cup \{s_{\widetilde{\alpha},1}\}$$
ist und der Coxeter-Graph $\Gamma(W_a, S_a)$ einer der Graphen aus Tabelle 2 ist.

Beispiel (siehe Bild 1). Sei $W = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = 1, (s_1s_2)^3 = 1\rangle$. Wir haben $W \cong D_3$,

$$\begin{aligned}
V &= \mathrm{Span}(\Delta),\\
\Delta &= \{\alpha_1, \alpha_2\},\\
B(\alpha_1, \alpha_2) &= -\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = -\tfrac{1}{2},\\
\Phi &= W\Delta = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_3\} \qquad \text{mit } \alpha_3 = s_1s_2(\alpha_2).
\end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass $|\alpha_i| = 1$ ist. Der Winkel zwischen α_i und α_j ist $120°$ für $i \neq j$. Es gilt $s_1(\alpha_1) = -\alpha_1$ und $s_2(\alpha_2) = -\alpha_2$. Wir setzen

$$s_3 = s_1s_2s_1.$$

Dann gilt auch $s_3(\alpha_3) = -\alpha_3$:

$$s_3(\alpha_3) = s_1s_2s_1(s_1s_2(\alpha_2)) = s_1(\alpha_2) = s_1s_2(-\alpha_2) = -\alpha_3.$$

Für $i = 1, 2, 3$ haben wir

$$\alpha_i^\vee = 2\alpha_i.$$

Merken wir an:

$$\alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee + \alpha_3^\vee = 0.$$

Dann gilt

$$L^\vee = \alpha_1^\vee \mathbb{Z} \oplus \alpha_2^\vee \mathbb{Z} = \alpha_1^\vee \mathbb{Z} + \alpha_2^\vee \mathbb{Z} + \alpha_3^\vee \mathbb{Z},$$

siehe Bild 1 (die Gitterpunkte sind hervorgehoben).

Sei $t_i = t(\alpha^\vee)$. Dann gilt $t_1 + t_2 + t_3$ (additive Schreibweise) und:

$$W_a = \langle s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3 \,|\; \begin{aligned} & s_1^2 = s_2^2 = 1,\ (s_1 s_2)^3 = 1,\ s_3 = s_1 s_2 s_1, \\ & t_1 t_2 t_3 = 1,\ [t_i, t_j] = 1, \\ & s_i t_i s_i^{-1} = t_i^{-1}, \\ & s_i t_j s_i^{-1} = t_i t_j \quad (i \neq j) \rangle \end{aligned} \quad .$$

Wir überprüfen die letzte Relation:

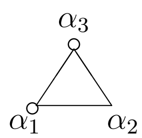
$$s_{\alpha_i} \circ t(2\alpha_j) \circ s_{\alpha_i}^{-1} = t(s_{\alpha_i}(2\alpha_j)) = t(2(\alpha_j - \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i)) = t(2(\alpha_j + \alpha_i)) = t(2\alpha_i) \circ t(2\alpha_j).$$

Nun setzten wir $z := s_3 t_3$. Man kann beweisen, dass

$$W_a = \langle s_1, s_2, z \,|\, s_1^2 = s_2^2 = z^2 = 1,\ (s_1 s_2)^3 = (s_1 z)^3 = (s_2 z)^3 = 1 \rangle$$

ist. Letzlich merken wir an, dass $z = s_{\alpha_3, 1}$ ist.

Die Gruppe W_a ist von Spiegelungen in Wänden des dreieckigen Alkoves erzeugt und hat das Coxeter-Diagramm



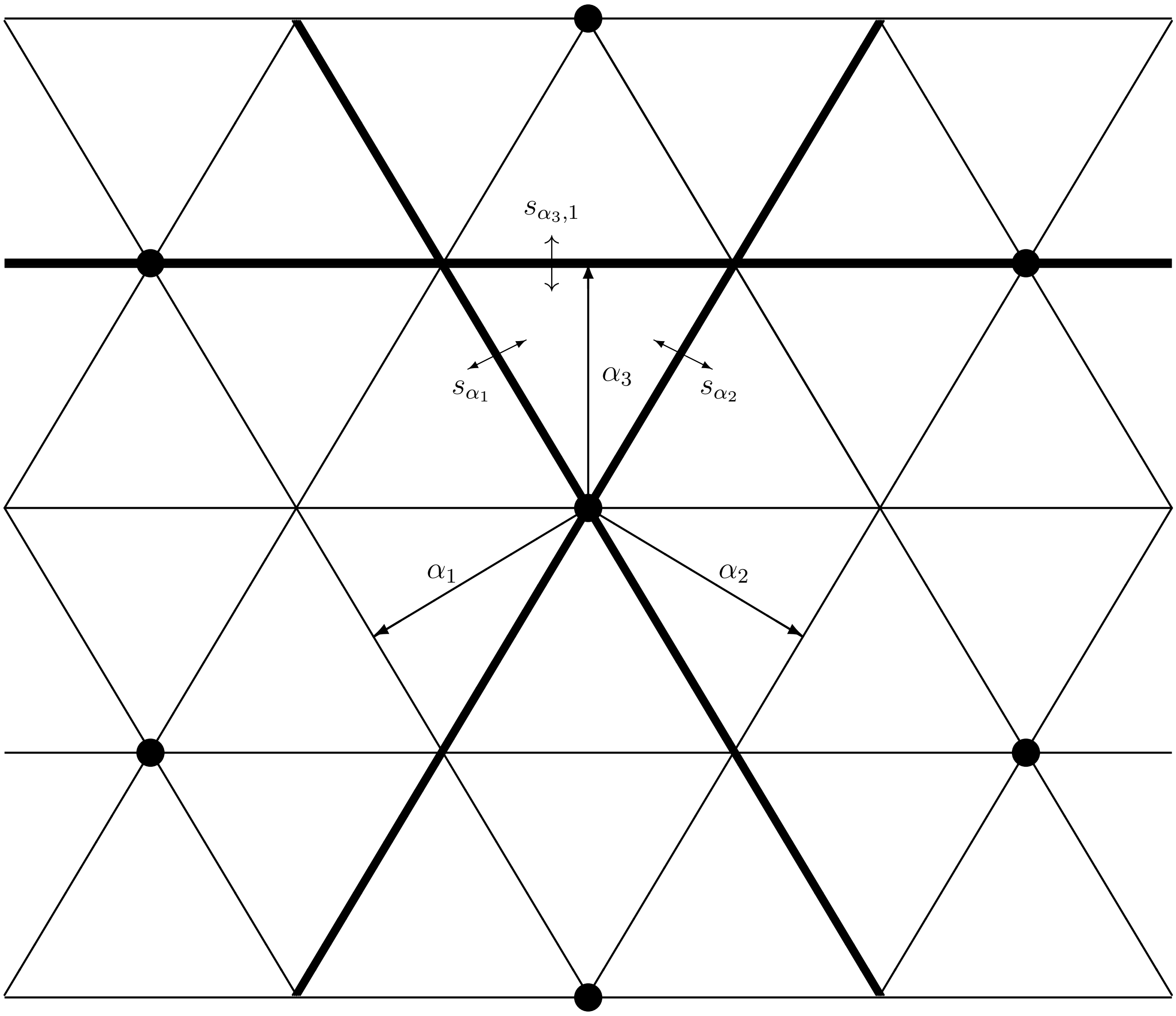


Bild 1

6.7 Grundlagen der hyperbolischen Geometrie

Wird geschrieben. Siehe weitere Abschnitte unten.

6.8 Hyperbolische Gruppen

Sei (W, S) ein irreduzibles Coxeter-Paar und sei B nichtsingular ($\mathrm{Rad}(B) = \{0\}$).
Wir betrachten den Vektorraum V mit der Basis $\{\alpha_s \,|\, s \in S\}$ und definieren

$$C := \{v \in V \,|\, B(v, \alpha_s) > 0 \text{ für alles} \in S \ \} \quad \text{und} \quad D := \overline{C}.$$

Sei $\{\omega_s \,|\, s \in S\}$ die Dualbasis von V bezüglich B: es gilt $B(\omega_s, \alpha_t) = \delta_{s,t}$. Dann gilt:

$$C = \{\sum_{s\in S} c_s\omega_s \,|\ \text{ alle } c_s > 0\}$$

und

$$D = \{\sum_{s\in S} c_s\omega_s \,|\ \text{ alle } c_s \geqslant 0\}.$$

Insbesondere gilt $\omega_s \in D$ für alle $s \in S$.

Bemerkung. Nach Korollar 5.3.5 operiert W auf V. Man kann beweisen:
Wenn $\mathrm{Rad}(B) = \{0\}$ gilt, dann ist D ein Fundamentalbereich für die Operierung von W auf $W(D)$.

Definition 6.8.1 Ein irreduzibles Coxeter-Paar (W, S) heißt *hyperbolisch*, falls gilt:

1) $\mathrm{Signatur}(B) = (n - 1, 1)$,
2) $B(v, v) < 0$ für alle $v \in C$.

In dem Fall sagt man auch, dass W *hyperbolisch* ist.

Bemerkung 6.8.2 Aus 2) folgt

3) $B(v, v) \leqslant 0$ für alle $v \in D$,
4) $B(\omega_s, \omega_s) \leqslant 0$ für alle $s \in S$.

Lemma 6.8.3 Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim V = n$. Sei $B : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit $\mathrm{Signatur}(B) = (n - 1, 1)$. Für jedes $\alpha \in V \setminus \{0\}$ bezeichnen wir

$$H_\alpha := \{v \in V \,|\, B(v, \alpha) = 0\}.$$

Dann gilt

$$B_{|H_\alpha} \succcurlyeq 0 \Leftrightarrow B(\alpha, \alpha) \leqslant 0.$$

Bemerkung 6.8.4 1) Früher haben wir bewiesen, dass $V = \langle\alpha_s\rangle \oplus H_{\alpha_s}$ gilt. Dabei haben wir benutzt, dass $B(\alpha_s, \alpha_s) = 1 \neq 0$ ist. Falls $B(\alpha, \alpha) = 0$ ist, dann gilt aber $\alpha \in H_\alpha$.
2) Aus $\mathrm{Signatur}(B) = (n-1, 1)$ folgt $\mathrm{Rad}(B) = \{0\}$ und daraus folgt $\dim(H_\alpha) = n-1$.

Satz 6.8.5 Ein irreduzibles Coxeter-Paar (W, S) ist hyperbolisch genau dann, wenn folgendes gilt:

1) Die assoziierte Bilinearform B ist nichtsingular und nicht positiv definit.
2) Für jedes $s \in S$ gilt $B_{S\setminus\{s\}} \succcurlyeq 0$,
   wobei $B_{S\setminus\{s\}}$ die mit $(W_{S\setminus\{s\}}, S \setminus \{s\})$ assoziierte Bilinearform ist.

Satz 6.8.6 Alle hyperbolischen Coxeter-Gruppen haben Rang von 3 bis 10. Es gibt unendlich viele hyperbolische Gruppen mit Rang 3. Es gibt nur endlich viele hyperbolische Gruppen des Ranges von 4 bis 10 (siehe die Liste im Abschnitt 9).

7 Die Liste von “irreduziblen” endlichen Coxeter-Gruppen

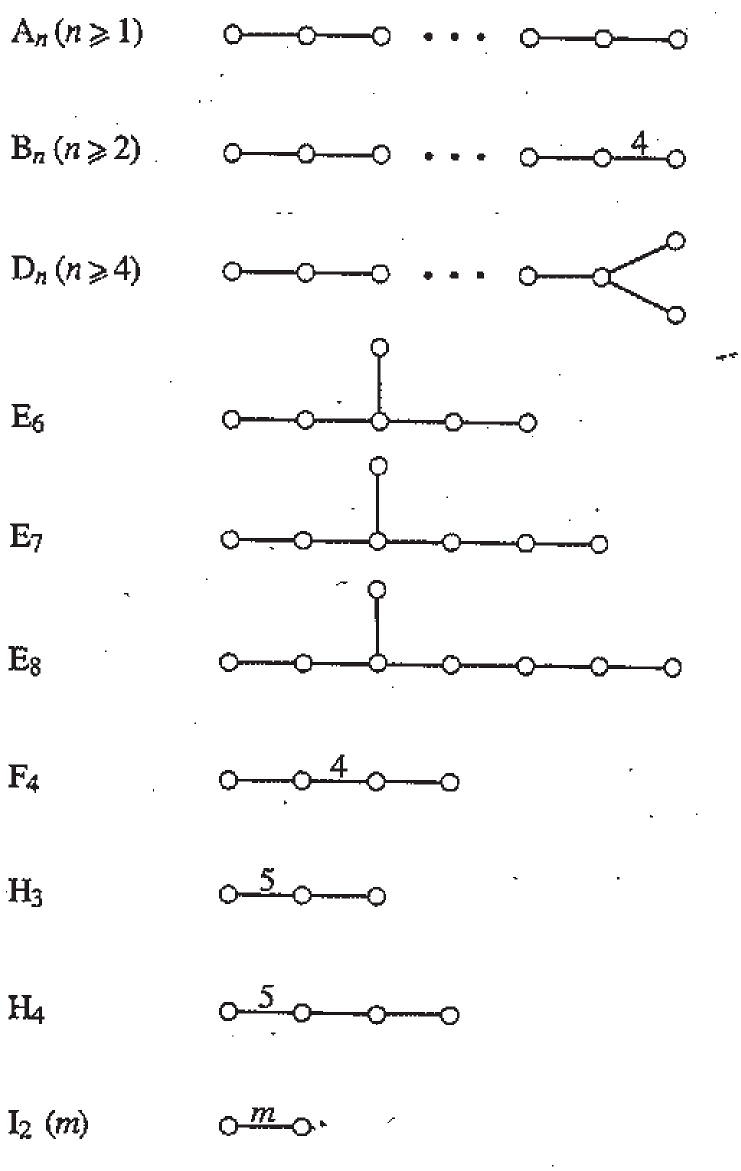


Tabelle 1

8 Die Liste von “irreduziblen” affinen Coxeter-Gruppen

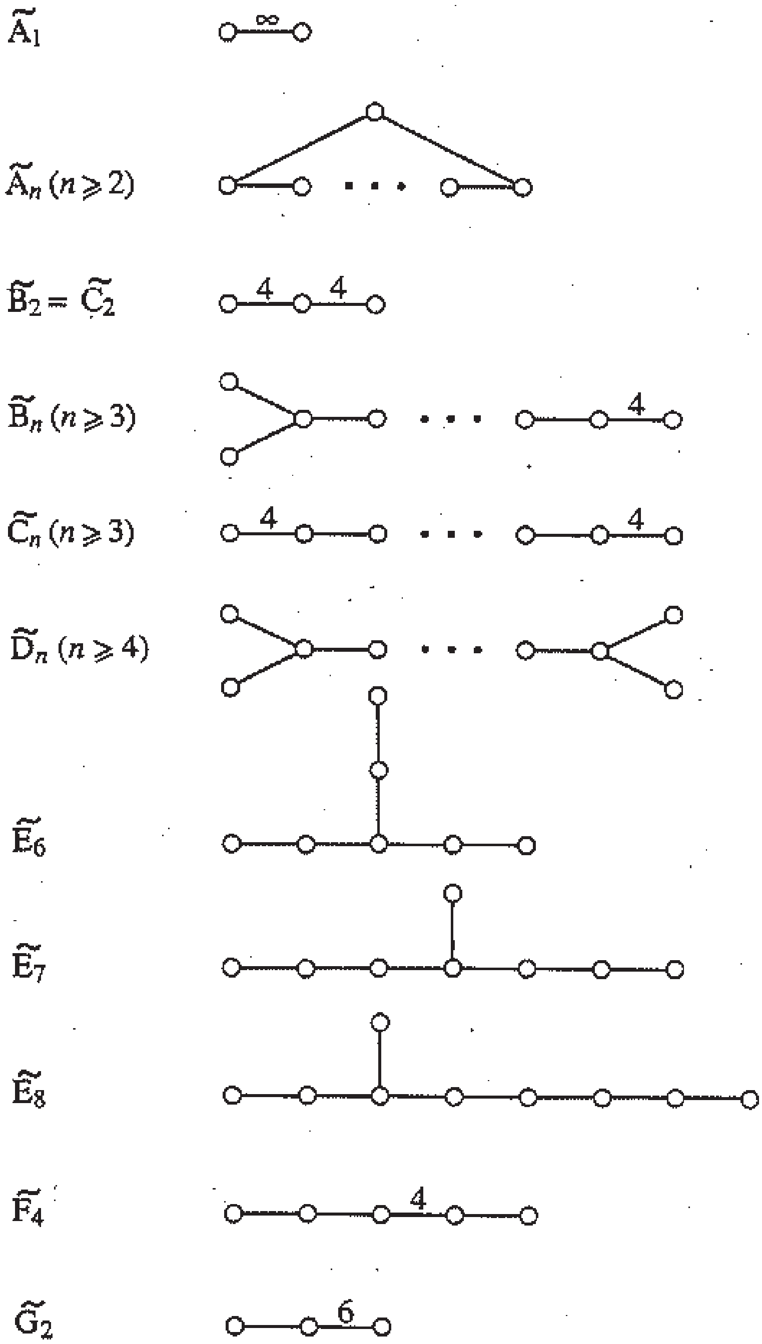
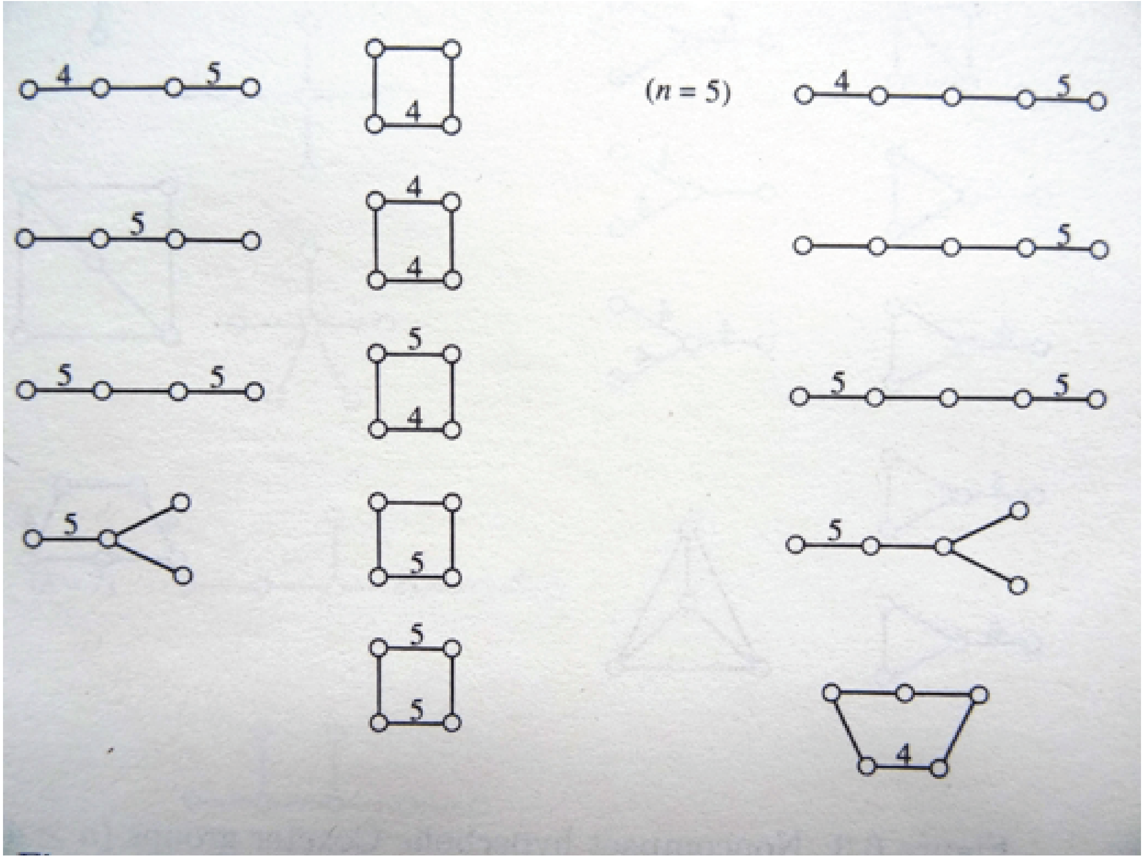
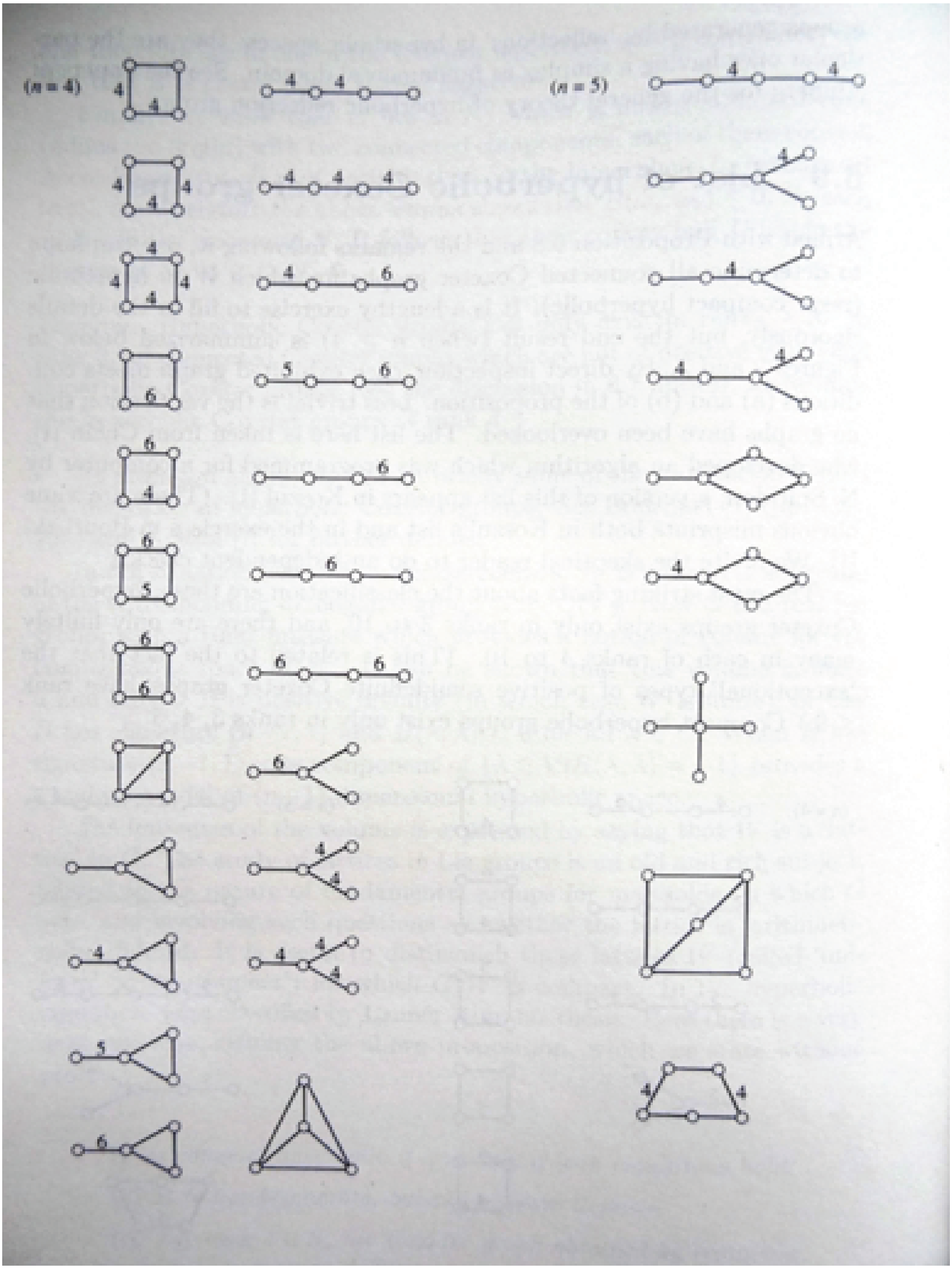
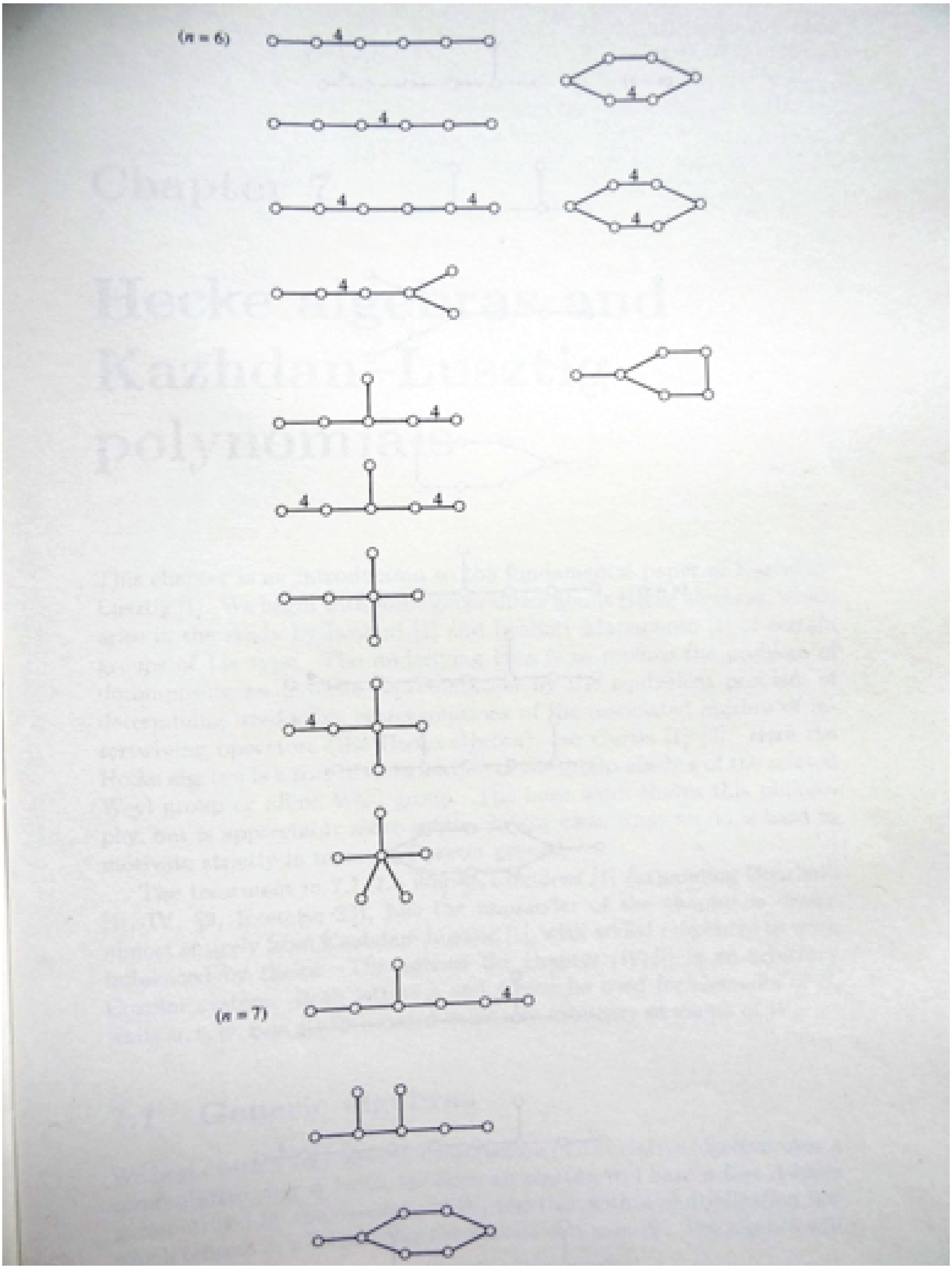


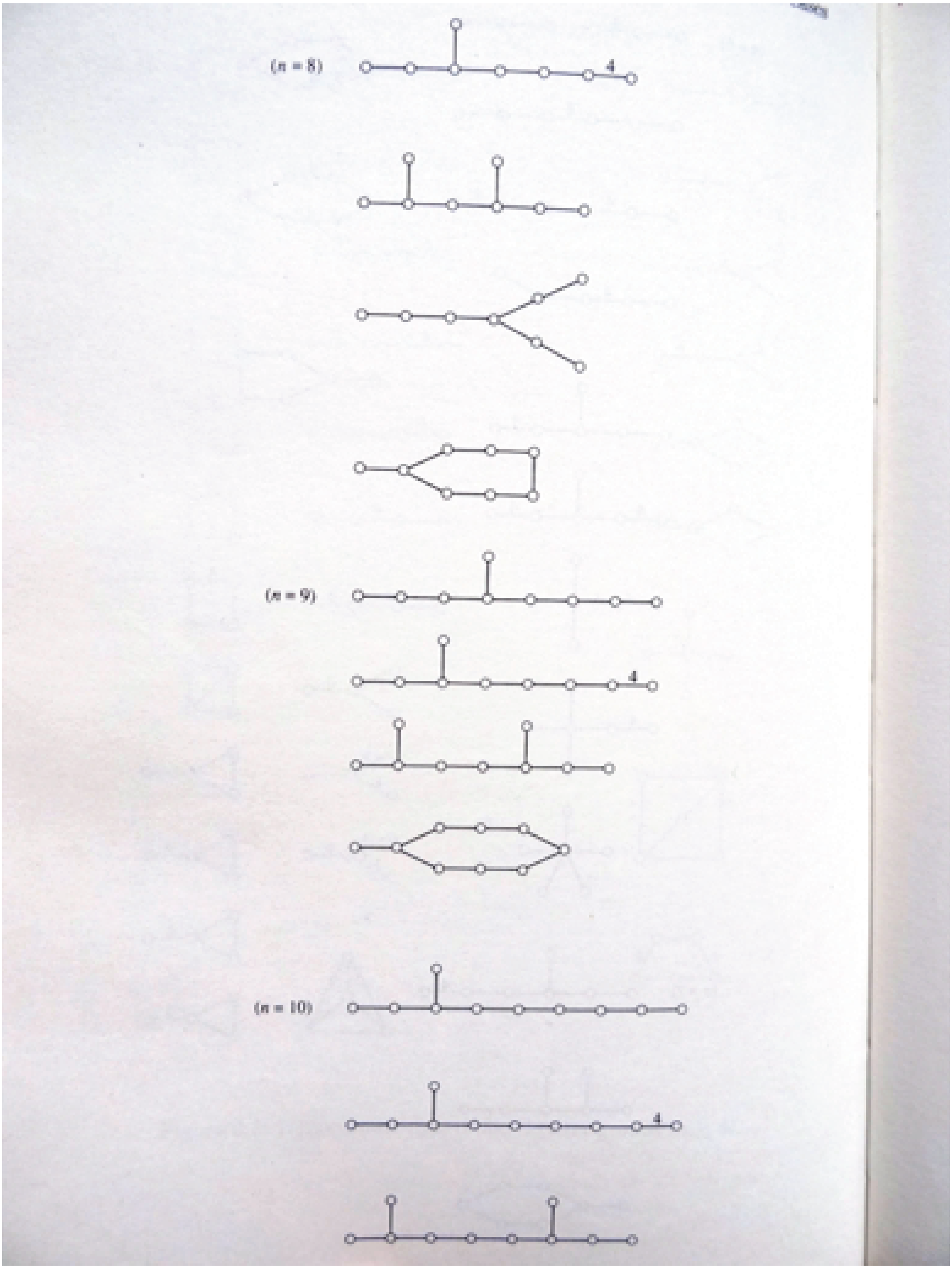
Tabelle 2

9 Die Liste von hyperbolischen Coxeter-Gruppen des Ranges $\geqslant 4$




(n = 4)
(n = 5)


(n = 6)
(n = 7)


(n = 8)
4
(n = 9)
4
(n = 10)
4