Coxetergruppen II
Übungsblatt 1

Zur Erinnerung:

1) $G = \langle S \mid s^2 = 1, (ss')^{m(s,s')} = 1 \ (s, s' \in S)\rangle$ mit $|S| < \infty$ und $m(s, s') \in \mathbb{N} \cup \infty$ ist eine Coxeter-Gruppe. Dabei gilt:
   - $m(s, s) = 1$ und $m(s, s') \geqslant 2$ für $s \neq s'$.
   - Die Relation $(ss')^{m(s,s')} = 1$ wird gestrichen, falls $m(s, s') = \infty$ ist.
2) V ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der Basis $\{\alpha_s \mid s \in S\}$.
3) Die bilineare Form $B : V \times V \to \mathbb{R}$ wird so definiert:
$$B(\alpha_s, \alpha_{s'}) := -\cos\Big(\frac{\pi}{m_{s,s'}}\Big).$$
4) Für jedes $s \in S$ wird die lineare Transformation $\sigma_s : V \to V$ so definiert:
$$\sigma_s(u) := u - 2B(u, \alpha_s)\alpha_s.$$

Aufgabe 1. Beweisen Sie die Formel $B(\sigma_s(u), \sigma_s(v)) = B(u, v)$.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe, die von zwei Elementen s_1, s_2 der Ordnung 2 erzeugt ist. Beweisen Sie, dass G einer der Diheder-Gruppen D_n oder D_∞ isomorph ist.

Hinweis. Es ist bekannt, dass diese Gruppen folgende Präsentationen haben:

$$\begin{aligned} D_n &= \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = 1, (s_1s_2)^n = 1\rangle, \\ D_\infty &= \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = 1\rangle. \end{aligned}$$

Betrachten Sie zwei Fälle: $\mathrm{Ord}(s_1s_2) < \infty$ und $\mathrm{Ord}(s_1s_2) = \infty$ und beweisen Sie, dass jede Relation zwischen s_1 und s_2 in G aus diesen Relationen folgt.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Coxeter-Gruppe
$$G = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1, (s_1s_2)^3 = 1, (s_1s_3)^2 = 1\rangle$$
und drei Matrizen in $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Beweisen Sie, dass die Abbildung $s_1 \mapsto A$, $s_2 \mapsto B$, $s_3 \mapsto C$ bis zu einem Homomorphismus $\phi : G \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ erweitert werden kann.
b) Beweisen Sie, dass ϕ surjektiv ist.

Bemerkung: Man kann beweisen, dass ϕ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4. Sei $G = \langle s_1, \dots, s_n \mid s_1^2 = \cdots = s_n^2 = 1, \ (s_is_j)^{m(s_i,s_j)} = 1 \ (i \neq j)\rangle$ eine Coxeter-Gruppe mit $m(s_i, s_j) \in 2\mathbb{Z}$ für $i \neq j$. Beweisen Sie, dass $|G| \geqslant 2^n$ ist.

Hinweis. Betrachten Sie einen entsprechenden Homomorphismus $\theta : G \to H$, wobei H eine bestimmte Gruppe ist.

Keine weitere Aufgaben.