Lösung der Aufgabe 2.4) aus Übungsblatt 7

Aufgabe 2. Sei $n \geqslant 4$. Wir betrachten die folgende Teilmenge $\Phi \subset \mathbb{R}^n$:

$$\Phi := \{c_i e_i + c_j e_j \,|\, c_i, c_j \in \{-1, 1\},\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1) Φ ist ein Wurzelsystem in $\mathbb{R}^n$.
2) $\Delta := \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n\}$ ist ein einfaches System in Φ.
3) Der Coxeter-Graph der Spiegelungsgruppe W_Φ hat den Typ D_n.
4) $|W_\Phi| = 2^{n-1} n!$.

Lösung. Teil 4). $W_\Phi = \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in \Phi \rangle$. Für $i \neq j$ gilt:

$$s_{e_i+e_j} := \begin{cases} e_i \mapsto -e_j, \\ e_j \mapsto -e_i, \\ e_k \mapsto e_k, \quad k \neq i, j. \end{cases}$$

$$s_{e_i-e_j} := \begin{cases} e_i \mapsto e_j, \\ e_j \mapsto e_i, \\ e_k \mapsto e_k, \quad k \neq i, j. \end{cases}$$

$$s_{e_i+e_j} \circ s_{e_i-e_j} : \begin{cases} e_i \mapsto -e_i, \\ e_j \mapsto -e_j, \\ e_k \mapsto e_k, \quad k \neq i, j. \end{cases}$$

Wir sehen, dass W_Φ zwei Untergruppen besitzt:

$$\langle s_{e_i-e_j} \,|\, 1 \leqslant i < j \leqslant n \rangle \cong S_n$$

und

$$\langle s_{e_i+e_j} \circ s_{e_i-e_j} \,|\, 1 \leqslant i < j \leqslant n \rangle \cong \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2^{n-1}.$$

Es gilt $W_\Phi \cong S_n \times \mathbb{Z}_2^{n-1}$.