Klausur Coxetergruppen, WS 13/14

(Prof. O. Bogopolski)

Aufgabe 1. Geben Sie Definitionen von folgenden Begriffen:

1) Eine Spiegelungsgruppe. [1 Punkt]
2) Ein Wurzelsystem. [1 Punkt]
3) Ein positives System in einem Wurzelsystem. [1 Punkt]
4) Ein einfaches System in einem Wurzelsystem. [1 Punkt]

Aufgabe 2. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des Euklidschen Raums $\mathbb{R}^n$.
Für jedes Tupel $c = (c_1, \ldots, c_n)$ der Zahlen $c_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, und für jede Permutation $\sigma \in S_n$ definieren wir eine lineare Abbildung $T_{c,\sigma} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$T_{c,\sigma}(e_i) = c_i e_{\sigma(i)}.$$

Sei W die Gruppe, die aus allen solchen $T_{c,\sigma}$ besteht.

1) Beweisen Sie, dass W eine Spiegelungsgruppe ist. [6 Punkte]
2) Beschreiben Sie das Wurzelsystem Φ, das mit W assoziiert ist. [6 Punkte]
3) Geben Sie ein einfaches System in Φ. [6 Punkte]
4) Beweisen Sie, dass $W \cong S_n \times \mathbb{Z}_2^n$ ist. [5 Punkte]

Aufgabe 3. Sei $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die Standardbasis des Euklidschen Raums $\mathbb{R}^4$.
Wir betrachten die Gitter $L' := \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{Z}e_3 + \mathbb{Z}e_4$ und

$$L := L' + \mathbb{Z}\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} e_i\Big).$$

Sei $\Phi := \{x \in L \,|\, ||x||^2 \in \{1, 2\}\}$. Es gilt

$$\Phi = \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j, \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}.$$

Hier sind alle Vorzeichen voneinander unabhängig; in $\pm e_i \pm e_j$ ist $i \neq j$.

1) Berechnen Sie $|\Phi|$. [1 Punkt]
2) Beweisen Sie, dass Φ ein Wurzelsystem in $\mathbb{R}^4$ ist. [6 Punkte]
3) Sei $\prec$ die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{R}^4$, die von $0 \prec e_4 \prec e_3 \prec e_2 \prec e_1$ induziert ist. Sei $\prod$ ein positives System in Φ bezüglich $\prec$. Schreiben Sie alle Elemente von $\prod$ auf. [6 Punkte]

`Fortsetzung Seite 2.`

4) Sei $\Delta := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, wobei

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \; e_2 - e_3, \\
\alpha_2 &= \; e_3 - e_4, \\
\alpha_3 &= \; e_4, \\
\alpha_4 &= \; \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)
\end{aligned}$$

ist. Beweisen Sie, dass Δ ein einfaches System ist. [6 Punkte]

5) Berechnen Sie die Coxeter-Matrix $A(\Delta)$. Dabei vergessen Sie nicht, die Vektoren α_i zu normieren. Malen Sie den Coxeter-Graph $\Gamma(\Delta)$. [6 Punkte]

6) Beweisen Sie, dass die Weyl-Gruppe W_Φ transitiv auf der Menge $\Phi_2 = \{\pm e_i \pm e_j\}$ operiert. Leiten Sie daraus ab (mit einer Begründung), dass $|W_\Phi| = 24 \cdot \mathrm{St}_{W_\Phi}(\alpha_1)$ ist. [6 Punkte]

7) Es ist bekannt, dass $\mathrm{St}_{W_\Phi}(\alpha_1)$ eine Weyl-Gruppe mit folgendem Coxeter-Graph ist:

$$\circ \overset{4}{\text{---}} \circ \text{---} \circ$$

Berechnen Sie $|\mathrm{St}_{W_\Phi}(\alpha_1)|$ mit Hilfe der Witt-Formel. [5 Punkte]
Berechnen Sie $|W_\Phi|$. [1 Punkt]