

Klausur Coxetergruppen, WS 13/14

(Prof. O. Bogopolski)

Aufgabe 1. Geben Sie Definitionen von folgenden Begriffen:

- 1) Eine Spiegelungsgruppe. [1 Punkt]
- 2) Ein Wurzelsystem. [1 Punkt]
- 3) Ein positives System in einem Wurzelsystem. [1 Punkt]
- 4) Ein einfaches System in einem Wurzelsystem. [1 Punkt]

Aufgabe 2. Sei e_1, \dots, e_n die Standardbasis des Euklidischen Raums \mathbb{R}^n . Für jedes Tupel $c = (c_1, \dots, c_n)$ der Zahlen $c_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, \dots, n$, und für jede Permutation $\sigma \in S_n$ definieren wir eine lineare Abbildung $T_{c,\sigma} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$T_{c,\sigma}(e_i) = c_i e_{\sigma(i)}.$$

Sei W die Gruppe, die aus allen solchen $T_{c,\sigma}$ besteht.

- 1) Beweisen Sie, dass W eine Spiegelungsgruppe ist. [6 Punkte]
- 2) Beschreiben Sie das Wurzelsystem Φ , das mit W assoziiert ist. [6 Punkte]
- 3) Geben Sie ein einfaches System in Φ . [6 Punkte]
- 4) Beweisen Sie, dass $W \cong S_n \times \mathbb{Z}_2^n$ ist. [5 Punkte]

Aufgabe 3. Sei $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die Standardbasis des Euklidischen Raums \mathbb{R}^4 . Wir betrachten die Gitter $L' := \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{Z}e_3 + \mathbb{Z}e_4$ und

$$L := L' + \mathbb{Z}\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 e_i\right).$$

Sei $\Phi := \{x \in L \mid \|x\|^2 \in \{1, 2\}\}$. Es gilt

$$\Phi = \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j, \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}.$$

Hier sind alle Vorzeichen voneinander unabhängig; in $\pm e_i \pm e_j$ ist $i \neq j$.

- 1) Berechnen Sie $|\Phi|$. [1 Punkt]
- 2) Beweisen Sie, dass Φ ein Wurzelsystem in \mathbb{R}^4 ist. [6 Punkte]
- 3) Sei \prec die lexikographische Ordnung auf \mathbb{R}^4 , die von $0 \prec e_4 \prec e_3 \prec e_2 \prec e_1$ induziert ist. Sei Π ein positives System in Φ bezüglich \prec . Schreiben Sie alle Elemente von Π auf. [6 Punkte]

Fortsetzung Seite 2.

4) Sei $\Delta := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, wobei

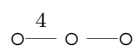
$$\begin{aligned}\alpha_1 &= e_2 - e_3, \\ \alpha_2 &= e_3 - e_4, \\ \alpha_3 &= e_4, \\ \alpha_4 &= \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)\end{aligned}$$

ist. Beweisen Sie, dass Δ ein einfaches System ist. [6 Punkte]

5) Berechnen Sie die Coxeter-Matrix $A(\Delta)$. Dabei vergessen Sie nicht, die Vektoren α_i zu normieren. Malen Sie den Coxeter-Graph $\Gamma(\Delta)$. [6 Punkte]

6) Beweisen Sie, dass die Weyl-Gruppe W_Φ transitiv auf der Menge $\Phi_2 = \{\pm e_i \pm e_j\}$ operiert. Leiten Sie daraus ab (mit einer Begründung), dass $|W_\Phi| = 24 \cdot |\text{St}_{W_\Phi}(\alpha_1)|$ ist. [6 Punkte]

7) Es ist bekannt, dass $\text{St}_{W_\Phi}(\alpha_1)$ eine Weyl-Gruppe mit folgendem Coxeter-Graph ist:



Berechnen Sie $|\text{St}_{W_\Phi}(\alpha_1)|$ mit Hilfe der Witt-Formel. [5 Punkte]

Berechnen Sie $|W_\Phi|$. [1 Punkt]