Coxetergruppen, WS 13/14

(Prof. Dr. O. Bogopolski)

1 Endliche Spiegelungsgruppen

1.1 Spiegelungen

Sei $V = \mathbb{R}^n$ ein Euklidischer Raum mit dem Skalarprodukt $(u, v) := \sum_{i=1}^n u_i v_i$. Die Zahl $||u|| := \sqrt{(u, u)}$ heißt *Norm* oder *Länge* des Vektors u.

Definition 1.1.1 a) Eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ heißt *orthogonal*, falls $A \cdot A^t = E$ ist, wobei A^t transponierte zu A matrix ist. Die Untergruppe der orthogonalen Matrizen wird mit $O_n(\mathbb{R})$ bezeichnet.

b) Die *orthogonale Gruppe* $\mathcal{O}(V)$ besteht aus linearen Transformationen $\varphi : V \to V$, die eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllen:

1) $(\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v)$ für alle $u, v \in V$;
2) $||\varphi(u)|| = ||u||$ für alle $u \in V$;
3) Die Darstellungsmatrix von φ in einer orthonormierten Basis e ist eine Orthogonalmatrix.

Definition 1.1.2 Sei $0 \neq \alpha \in V$. Dann ist

$$H_\alpha := \{v \in V \mid (v, \alpha) = 0\}$$

die Hyperebene in V, die dem Vektor α orthogonal ist. Die *mit α assoziierte Spiegelung* $s_\alpha : V \to V$ ist die lineare Abbildung, die mit folgenden Formeln gegeben ist:

$$\begin{aligned} s_\alpha(\alpha) &= -\alpha, \\ s_\alpha(v) &= v \qquad \text{für alle } v \in H_\alpha. \end{aligned}$$

Lemma 1.1.3 Für alle $v \in V$ gilt:

$$s_\alpha(v) = v - \frac{2(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \cdot \alpha.$$

Bemerkung.
1) $s_\alpha = s_{r\alpha}$ für alle $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
2) $s_\alpha^2 = 1$;
3) $s_\alpha \in \mathcal{O}(V)$.

Definition 1.1.4 Eine Gruppe $G \leqslant \mathcal{O}(V)$ heißt *endliche Spiegelungsgruppe*, falls
1) G endlich ist,
2) Es existieren Spiegelungen $s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_k}$, so dass $G = \langle s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_k} \rangle$ ist.

Definition 1.1.5 Sei G eine Gruppe, die auf V durch lineare Abbildungen operiert. Die Menge

$$\mathrm{Fix}_V(G) := \{v \in V \,|g(v) = v \;\text{ für alle }\; g \in G\}$$

heißt *Fixpunktmenge* der Gruppe G in V. Es ist klar, dass $\mathrm{Fix}_V(G)$ ein Untervektorraum von V ist. Die Gruppe G operiert auf V *wesentlich*, falls $\mathrm{Fix}_V(G) = \{0\}$ ist.

Beispiele.

1) Sei K_m ein reguläres m-Eck auf der Ebene. Seine Symmetriegruppe D_m besteht aus m Spiegelungen und m Rotationen. So gilt $|D_m| = 2m$. Außerdem ist D_m von zwei Spiegelungen erzeugt. So ist D_m eine endliche Spiegelungsgruppe und D_m operiert auf $\mathbb{R}^2$ wesentlich.

2) Die Permutationsgruppe S_n operiert auf $\mathbb{R}^n$ durch Permutationen von Elementen der Standardbasis: $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Sei $e := \sum_{i=1}^n e_i$. Es gilt

$$\mathrm{Fix}_{\mathbb{R}^n}(S_n) = \mathcal{L}(e).$$

Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ die Ebene, die dem Vektor e orthogonal ist. Diese Ebene ist S_n-invariant und

$$\mathrm{Fix}_H(S_n) = \{0\}.$$

Da $\dim H = n-1$ ist, ist es möglich, S_n als eine Untergruppe von $\mathcal{O}(\mathbb{R}^{n-1}) \cong \mathcal{O}(H)$ zu betrachten. Die Gruppe S_n ist eine endliche Spiegelungsgruppe und S_n operiert auf H wesentlich.

3) Für $i = 1, \dots, n$ sei τ_i die Spiegelung auf $\mathbb{R}^n$, die den Vektor e_i invertiert und die anderen Standardvektoren e_j fixiert. Dann gilt

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{n \;\text{ Mal}} =: \mathbb{Z}_2^n.$$

Wir betrachten die Gruppe $G = \langle S_n, \mathbb{Z}_2^n \rangle$. Dann gilt:
1) $\mathbb{Z}_2^n \lhd G$,
2) $\mathbb{Z}_2^n \cap S_n = 1$.
Daraus folgt, dass G das semidirekte Produkt von $\mathbb{Z}_2^n$ und S_n ist:

$$G = \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n.$$

Die Gruppe G operiert auf $\mathbb{R}^n$ wesentlich und ist eine endliche Spiegelungsgruppe der Ordnung $2^n \cdot n!$.

1.2 Wurzeln

Behauptung 1.2.1 Sei $0 \neq \alpha \in V$ und sei $t \in \mathcal{O}(V)$. Dann gilt

$$ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}.$$

Insbesondere gilt: Ist W eine Spiegelungsgruppe und ist $s_\alpha, w \in W$, dann ist $s_{w(\alpha)} \in W$.

Korollar 1.2.2 Sei W eine Spiegelungsgruppe. Dann operiert W auf der Menge

$$\mathrm{Linien}(W) := \{\mathcal{L}_\alpha \,|\, s_\alpha \in W\}$$

durch $w(\mathcal{L}_\alpha) = \mathcal{L}_{w(\alpha)}$, $w \in W$.

Definition 1.2.3 Eine endliche Teilmenge $\Phi \subset V \setminus \{0\}$ heißt *Wurzelsystem*, falls folgendes gilt:

(R1) $\alpha \in \Phi \Rightarrow -\alpha \in \Phi$ und $r \cdot \alpha \notin \Phi$ für $r \in \mathbb{R}, r \neq \pm 1$;
(R2) $s_\alpha(\Phi) = \Phi$ für alle $\alpha \in \Phi$.

Satz 1.2.4 1) Ist $\Phi \subset V$ ein Wurzelsystem, dann ist $W := \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in \Phi\rangle$ eine endliche Spiegelungsgruppe in $\mathcal{O}(V)$. (Diese Gruppe W heißt *mit Φ assoziierte Spiegelungsgruppe*).

2) Ist W eine endliche Spiegelungsgruppe in $\mathcal{O}(V)$, dann ist $\Phi := \bigcup\limits_{s_\alpha \in W, ||\alpha||=1} \{\alpha, -\alpha\}$ ein Wurzelsystem in V. Die mit Φ assoziierte Spiegelungsgruppe ist W.

1.3 Positive und endliche Systeme

Definition 1.3.1 Eine *Totalordnung* auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine transitive Relation $\prec$ auf V, so dass:
1) für je zwei verschiedene Vektoren $u, v \in V$ gilt entweder $u \prec v$, oder $v \prec u$;
2) für je drei Vektoren $u, v, w \in V$ gilt: $u \prec v \Rightarrow u + w \prec v + w$;
3) für je zwei Vektoren $u, v \in V$ und eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$u \prec v \Rightarrow \begin{cases} ru \prec rv, & \text{falls } r > 0 \text{ ist,} \\ rv \prec ru, & \text{falls } r < 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Beispiel. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^n$. Wir definieren $0 \prec v_n \prec \cdots \prec v_1$ und erweitern $\prec$ auf V lexikographisch:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \prec \lambda'_1 v_1 + \lambda'_2 v_2 + \cdots + \lambda'_n v_n,$$

falls ein k mit $1 \leqslant k \leqslant n$ existiert, so dass $\lambda_1 = \lambda'_1, \ldots, \lambda_{k-1} = \lambda'_{k-1}$ und $\lambda_k < \lambda'_k$ gilt.

Bezeichnung. Sei $\prec$ eine Totalordnung auf V. Wir bezeichnen

$$V^+ := \{v \in V \,|\, 0 \prec v\},$$
$$V^- := \{v \in V \,|\, v \prec 0\}.$$

Es ist klar, dass $V^- = -V^+$ und $V = V^+ \sqcup V^- \sqcup \{0\}$ gelten.

Definition 1.3.2 Sei Φ ein Wurzelsystem in V und sei $\prec$ eine Totalordnung auf V. Die Teilmenge $\prod := V^+ \cap \Phi$ heißt *positives System* in Φ bezüglich $\prec$. Die Teilmenge $V^- \cap \Phi$ heißt *negatives System* in Φ bezüglich $\prec$.

Bemerkung. Für $0 \neq \alpha \in V$ genau ein Element aus $\{\alpha, -\alpha\}$ liegt in V^+. Da Φ die Bedingung $\alpha \in \Phi \Rightarrow -\alpha \in \Phi$ erfüllt, haben wir $|\prod| = \frac{1}{2} \cdot |\Phi|$ und $\prod \cup (-\prod) = \Phi$.

Definition 1.3.3 Sei Φ ein Wurzelsystem in V. Eine Teilmenge $\Delta \subset \Phi$ heißt *einfaches System* in Φ, falls folgendes gilt:
1) Δ ist eine Basis von $\mathrm{Span}(\Phi)$;
2) jedes $\alpha \in \Phi$ ist eine lineare Kombination von Elementen aus Δ, wobei entweder alle Koeffizienten dieser Kombination positiv sind, oder alle Koeffizienten dieser Kombination negativ sind.

Bezeichnung. Für eine Teilmenge $U = \{u_1, \dots, u_k\} \subset V$ bezeichnen wir

$$\mathrm{Cone}^+(U) := \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k \mid \lambda_1 \geqslant 0, \dots, \lambda_k \geqslant 0\},$$

$$\mathrm{Cone}^-(U) := \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k \mid \lambda_1 \leqslant 0, \dots, \lambda_k \leqslant 0\}.$$

Es ist klar: $\mathrm{Cone}^-(U) = -\mathrm{Cone}^+(U)$.
Dann können wir die Definition 1.3.3 folgendermaßen umformulieren:

Definition 1.3.4 Sei Φ ein Wurzelsystem in V. Eine Teilmenge $\Delta \subset \Phi$ heißt *einfaches System* in Φ, falls folgendes gilt:
1) Δ ist eine Basis von $\mathrm{Span}(\Phi)$;
2) $\Phi = (\mathrm{Cone}^+(\Delta) \cap \Phi) \coprod (\mathrm{Cone}^-(\Delta) \cap \Phi)$.

Satz 1.3.5 Sei Φ ein Wurzelsystem in V.

(a) Für jedes einfache System Δ in Φ existiert ein einziges positives System $\prod$ mit $\Delta \subseteq \prod \subseteq \Phi$.
(b) Für jedes positive System $\prod$ in Φ existiert ein einziges einfaches System Δ mit $\Delta \subseteq \prod \subseteq \Phi$.
(c) Es existiert ein einfaches System Δ in Φ.

Im Beweis wurde das folgende Lemma benutzt.

Lemma 1.3.6 Sei Φ ein Wurzelsystem in V und sei $\prod$ ein positives System in Φ. Dann gelten:

(i) Ist Δ eine minimale Teilmenge von $\prod$ mit der Eigenschaft $\Delta \subseteq \prod \subseteq \mathrm{Cone}^+(\Delta)$, dann gilt $(\alpha, \beta) \leqslant 0$ für alle $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \neq \beta$.
(ii) Δ aus (i) ist ein einfaches System in Φ.

Korollar 1.3.7 Sei Φ ein Wurzelsystem in V und sei Δ ein einfaches System in Φ. Dann gilt

$$(\alpha, \beta) \leqslant 0 \text{ für alle } \alpha, \beta \in \Delta,\ \alpha \neq \beta.$$

1.4 Die Weyl-Gruppe operiert transitiv auf der Menge von einfachen (bzw. positiven) Untersystemen von Φ

Sei Φ ein Wurzelsystem in V. Die Gruppe $W := \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in \Phi \rangle$ heißt mit Φ assoziierte *Weyl-Gruppe.*

Satz 1.4.1 Sei Φ ein Wurzelsystem in V und sei W die assoziierte mit Φ Weyl-Gruppe. Dann gilt:

1) Ist $\prod$ ein positives System in Φ, dann ist $w(\prod)$ auch ein positives System in Φ für jedes $w \in W$.
2) Ist Δ ein einfaches System in Φ, dann ist $w(\Delta)$ auch ein einfaches System in Φ für jedes $w \in W$.

Satz 1.4.2 Für jedes $\alpha \in \Delta$ gilt: $s_\alpha(\prod \setminus \{\alpha\}) = \prod \setminus \{\alpha\}$.

Satz 1.4.2′ Für jedes $\alpha \in \Delta$ gilt: $s_\alpha(\prod) = (\prod \setminus \{\alpha\}) \cup \{-\alpha\}$.

Satz 1.4.3 Sei Φ ein Wurzelsystem in V. Dann gilt:

1) Für je zwei positive Systeme $\prod, \prod' \subseteq \Phi$ existiert $w \in W$ mit $w(\prod) = \prod'$.
2) Für je zwei einfache Systeme $\Delta, \Delta' \subseteq \Phi$ existiert $w \in W$ mit $w(\Delta) = \Delta'$.

1.5 Einfache Erzeuger der Weyl-Gruppe

Definition 1.5.1 Sei Δ ein einfaches System in Φ. Jedes $\beta \in \Phi$ kann in der Form

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \cdot \alpha$$

mit $c_\alpha \in \mathbb{R}$ geschrieben werden. Die Zahl

$$\mathbf{ht}(\beta) := \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha$$

heißt *Höhe* von β bezüglich Δ.

Bezeichnung. Sei Φ ein Wurzelsystem. Für jede Teilmenge $I \subseteq \Phi$ sei $W_I := \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in I \rangle$. Mit dieser Bezeichnung ist W_Φ die Weyl-Gruppe, die mit Φ assoziiert ist.

Satz 1.5.2 Für jedes einfache System Δ in Φ gilt $W_\Phi = W_\Delta$.

Satz 1.5.3 Für jedes einfache System Δ in Φ gilt $W(\Delta) = \Phi$.

1.6 Längen von Elementen der Weyl-Gruppe

Sei Φ ein Wurzelsystem in V. Sei Δ ein einfaches System in Φ. Sei $W := \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta \rangle$.

Definition 1.6.1 Sei $w \in W$. Die *Länge* von w (bezüglich Δ) ist

$$l(w) := \min\{n \,|\, w = s_1 s_2 \dots s_n, \ \text{ wobei } \ s_i \in \{s_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta\}\}.$$

Behauptung 1.6.2 Für jedes $w \in W$ gilt:

1)
$$\begin{cases} l(e) = 0, \\ l(w) = 1 \Leftrightarrow w = s_\alpha \quad \text{für ein } \ \alpha \in \Delta, \\ l(w) = l(w^{-1}). \end{cases}$$

2) $\det(w) = (-1)^{l(w)}$.

3) $l(s_\alpha w) = l(w) \pm 1$ für alle $\alpha \in \Delta$.

Definition 1.6.3 Für $w \in W$ setzen wir

$$n(w) := |\prod \bigcap \ w^{-1}(-\prod)|.$$

Mit anderen Worten: $n(w)$ ist die Anzahl von positiven Wurzel-Vektoren, die unter w in die negativen Wurzel-Vektoren geschickt werden.

Behauptung 1.6.4 Es gilt $n(e) = 0$ und $n(w) = n(w^{-1})$.

Lemma 1.6.5 Für $\alpha \in \Delta$ und $w \in W$ gilt:

1) $w(\alpha) \succ 0 \Rightarrow n(ws_\alpha) = n(w) + 1$,
2) $w(\alpha) \prec 0 \Rightarrow n(ws_\alpha) = n(w) - 1$,
3) $w^{-1}(\alpha) \succ 0 \Rightarrow n(s_\alpha w) = n(w) + 1$,
4) $w^{-1}(\alpha) \prec 0 \Rightarrow n(s_\alpha w) = n(w) - 1$.

Korollar 1.6.6 Ist $w = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_k}$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \Delta$, dann ist $n(w) \leqslant k$. Insbesondere gilt $n(w) \leqslant l(w)$.

1.7 Kürzungssatz

Satz 1.7.1 Sei $w = s_1 s_2 \dots s_k$, wobei alle $s_i = s_{\alpha_i}$ mit $\alpha_i \in \Delta$ sind.
Ist $n(w) < k$, dann existieren $1 \leqslant i < j \leqslant k$, so dass folgendes gilt:

1) $\alpha_i = (s_{i+1} \dots s_{j-1})(\alpha_j)$,
2) $s_{i+1} s_{i+2} \dots s_j = s_i s_{i+1} \dots s_{j-1}$,
3) $w = s_1 \dots \widehat{s_i} \dots \widehat{s_j} \dots s_k$.

Beweis. (a) Da $n(w) < k$ ist, impliziert Lemma 1.6.5, dass ein $j \leqslant k$ mit

$$(s_1 \dots s_{j-1})(\alpha_j) \prec 0$$

existiert. Daraus und aus $\alpha_j \succ 0$ folgt, dass ein $i < j$ mit

$$(s_{i+1} \dots s_{j-1})(\alpha_j) \succ 0 \text{ und } (s_i s_{i+1} \dots s_{j-1})(\alpha_j) \prec 0$$

existiert. Mit den Bezeichnungen $\beta := (s_{i+1} \dots s_{j-1})(\alpha_j)$ und $s_{\alpha_i} = s_i$ gilt also $\beta \in \prod$ und $s_{\alpha_i}(\beta) \in (-\prod)$. Dann gilt $\beta = \alpha_i$ nach Satz 1.4.2.

(b) Bezeichne $t = s_{i+1} \dots s_{j-1}$. Nach (a) gilt $\alpha_i = t(\alpha_j)$. Dann gilt nach der Behauptung 1.2.1:

$$t s_{\alpha_j} t^{-1} = s_{t(\alpha_j)} = s_{\alpha_i}.$$

Schreiben wir das ausführlich auf:

$$(s_{i+1} \dots s_{j-1}) s_j (s_{j-1} \dots s_{i+1}) = s_i.$$

Das ist äquivalent zu (b). Die Behauptung (c) folgt aus (b). □

Korollar 1.7.2 Für alle $w \in W$ gilt $n(w) = l(w)$.

Jetzt lassen sich einige alte Behauptungen neu formulieren:

Satz 1.7.3 (Kürzungssatz)
Sei $w = s_1 s_2 \dots s_k$, wobei alle $s_i = s_{\alpha_i}$ mit $\alpha_i \in \Delta$ sind.
Ist $l(w) < k$, dann existieren $1 \leqslant i < j \leqslant k$, so dass folgendes gilt:

1) $\alpha_i = (s_{i+1} \dots s_{j-1})(\alpha_j)$,
2) $s_{i+1} s_{i+2} \dots s_j = s_i s_{i+1} \dots s_{j-1}$,
3) $w = s_1 \dots \widehat{s_i} \dots \widehat{s_j} \dots s_k$.

Lemma 1.7.4 Für $\alpha \in \Delta$ und $w \in W$ gilt:

1) $w(\alpha) \succ 0 \Rightarrow l(w s_\alpha) = l(w) + 1$,
2) $w(\alpha) \prec 0 \Rightarrow l(w s_\alpha) = l(w) - 1$,
3) $w^{-1}(\alpha) \succ 0 \Rightarrow l(s_\alpha w) = l(w) + 1$,
4) $w^{-1}(\alpha) \prec 0 \Rightarrow l(s_\alpha w) = l(w) - 1$.

Behauptung 1.7.5 Für $w \in W$ gilt

$$l(w) := |\prod \bigcap w^{-1}(-\prod)|.$$

Mit anderen Worten: $l(w)$ ist die Anzahl von positiven Wurzel-Vektoren, die unter w in die negativen Wurzel-Vektoren geschickt werden.

1.8 Eine Präsentation von W

Für $\alpha, \beta \in \Delta$ sei $m_{\alpha,\beta} := \mathrm{Ord}(s_\alpha s_\beta)$ in W.

Satz 1.8.1 Sei Φ ein Wurzelsystem in V. Sei Δ ein einfaches System in Φ. Sei $W := \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta \rangle$. Dann hat die Weyl-Gruppe W die folgende Präsentation:

$$W = \langle s_\alpha \, (\alpha \in \Delta) \,|\, (s_\alpha s_\beta)^{m_{\alpha,\beta}} = 1 \, (\alpha, \beta \in \Delta) \rangle.$$

1.9 Scharfe Transitivität der Weyl-Gruppe W und das längste Element in W

Definition 1.9.1 Eine Gruppe G operiert auf einer Menge M *scharf transitiv*, falls folgendes gilt:

1) G operiert auf M transitiv:
für alle $m_1, m_2 \in M$ existiert ein $g \in G$, so dass $g(m_1) = m_2$ gilt.
2) Stabilisator jedes Elements in M ist trivial:
aus $g(m) = m$ mit $g \in G$ und $m \in M$ folgt $g = 1$.

Satz 1.9.2 Sei Φ ein Wurzelsystem in V. Die Weyl-Gruppe W von Φ operiert scharf transitiv auf der Menge aller positiven Systeme in Φ.

Satz 1.9.3 Sei Φ ein Wurzelsystem in V. Dann existiert ein einziges Element w_0 in der Weyl-Gruppe W von Φ, das die maximal mögliche Länge hat. Außerdem gilt:

1) $l(w_0) = |\Phi|/2$,
2) $w_0(\prod) = -\prod$,
3) $w_0^2 = 1$.

1.10 Parabolische Untergruppen der Weyl-Gruppe W

Seien

- Φ ein Wurzelsystem in V,
- Δ ein einfaches System in Φ,
- $W = \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in \Phi \rangle = \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta \rangle$ die Weyl-Gruppe für Φ,
- $l : W \to \mathbb{N}_0$ die Länge-Funktion bezüglich des Erzeugersystems $\{s_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta\}$.

Mit jeder Teilmenge $\Delta' \subseteq \Delta$ assoziieren wir die folgende Untergruppe von W:

$$W_{\Delta'} := \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta' \rangle.$$

Behauptung 1.10.1 Wenn wir Δ durch $w(\Delta)$ $(w \in W)$ ersetzen, dann wird $W_{\Delta'}$ durch die folgende Untergruppe ersetzt:

$$\langle s_\alpha \,|\, \alpha \in w(\Delta') \rangle = \langle s_{w(\beta)} \,|\, \beta \in \Delta' \rangle = \langle w s_\beta w^{-1} \,|\, \beta \in \Delta' \rangle = w W_{\Delta'} w^{-1}.$$

Definition 1.10.2 Alle Untergruppen von W der Form $wW_{\Delta'}w^{-1}$ mit $\Delta' \subseteq \Delta$ und $w \in W$ heißen *parabolisch.*

Bezeichnung. Für $\Delta' \subseteq \Delta$ sei $V_{\Delta'} := \mathrm{Span}(\Delta')$ und sei $\Phi_{\Delta'} := \Phi \cap V_{\Delta'}$.

Satz 1.10.3 Mit den vorherigen Bezeichnungen gilt:

(a) 1) $\Phi_{\Delta'}$ ist ein Wurzelsystem in $V_{\Delta'} \subseteq V$.
   2) Δ' ist ein einfaches System in $\Phi_{\Delta'}$.
   3) $W_{\Delta'}$ ist die Weyl-Gruppe für $\Phi_{\Delta'}$.

(b) Für die Länge-Funktionen $l : W \to \mathbb{N}_0$ und $l_{\Delta'} : W_{\Delta'} \to \mathbb{N}_0$ gilt $l_{\Delta'} = l|_{W_{\Delta'}}$.

(c) Sei $W_{\Delta'} := \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta' \rangle$ und $W^{\Delta'} := \{w \in W \,|\, l(ws_\alpha) > l(w)$ für alle $\alpha \in \Delta'\}$. Dann gilt: Für jedes $w \in W$ existieren eindeutige $u \in W^{\Delta'}$ und $v \in W_{\Delta'}$ so dass $w = uv$ gilt.

Außerdem gilt:

1) $l(w) = l(u) + l(v)$,
2) $u \in wW_{\Delta'}$,
3) $l(u) = \min\{l(x) \,|\, x \in wW_{\Delta'}\}$,
4) Das Element u mit den Bedingungen 2) und 3) ist eindeutig.

1.11 Poincaré-Polynome und Witt-Formel

Definition 1.11.1 Sei Δ ein einfaches System in einem Wurzelsystem Φ.
Sei $l : W \to \mathbb{N}_0$ die Länge-Funktion auf der Weyl-Gruppe W bezüglich des Erzeugersystems $\{s_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta\}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Zahlen $a_n := |\{w \in W \,|\, l(w) = n\}|$. Das folgende Polynom heißt *Poincaré-Polynom* für W:

$$W(t) := \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n = \sum_{w \in W} t^{l(w)}.$$

Für eine beliebige Teilmenge $X \subseteq W$ definieren wir

$$X(t) := \sum_{w \in X} t^{l(w)}.$$

Beispiel. Sei W die Gruppe der Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks. Ein einfaches Erzeugersystem für W kann mit $\{(12), (23)\}$ identifiziert werden.

w	id	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
$l(w)$	0	1	1	3	2	2

Dann gilt $W(t) = 1 + 2t + 2t^2 + t^3$.

Satz 1.11.2 Sei Δ ein einfaches System in Φ und sei $\Delta' \subseteq \Delta$. Dann gibt es zwei Poincaré-Polynome für $W_{\Delta'}$: zunächst für $X := W_{\Delta'}$ als Teilmenge von W mit der Länge-Funktion l auf W, desweiteren für $W_{\Delta'}$ als selbstständige Gruppe mit der Länge-Funktion $l_{\Delta'}$. Diese Polynome sind gleich:

$$W_{\Delta'}(t) := \sum_{w \in W_{\Delta'}} t^{l(w)} = \sum_{w \in W_{\Delta'}} t^{l_{\Delta'}(w)}.$$

Beweis. Siehe 1.10.3 (b).

Satz 1.11.3 (Witt-Formel). Sei Φ ein Wurzelsystem in V und sei Δ ein einfaches System in Φ. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Satz 1.10.3. c):

$$\sum_{\Delta' \subseteq \Delta} (-1)^{|\Delta'|} \cdot \frac{W(t)}{W_{\Delta'}(t)} = \sum_{\Delta' \subseteq \Delta} (-1)^{|\Delta'|} \cdot W^{\Delta'}(t) = t^{|\Phi|/2}.$$

Korollar 1.11.4 Sei Φ ein Wurzelsystem in V und sei Δ ein einfaches System in Φ. Dann gilt für die Weyl-Gruppe W und ihre parabolischen Untergruppen die folgende Formel:

$$\sum_{\Delta' \subseteq \Delta} (-1)^{|\Delta'|} \cdot \frac{|W|}{|W_{\Delta'}|} = 1.$$

Diese Formel ermöglicht, $|W|$ zu berechnen, falls $|\Delta|$ ungerade ist und alle Ordnungen $|W_{\Delta'}|$ mit $\Delta' \subsetneqq \Delta$ bekannt sind.

Beispiel. Die Ordnung der Weyl-Gruppe aus Aufgabe 1 des Blatts 3 ist 24.

1.12 Fundamentalbereich

Wir fixieren $\Delta \subset \prod \subset \Phi \subset V$. Sei W die Weyl-Gruppe von Φ. Für $\alpha \in V \setminus \{0\}$ definieren wir

$$\begin{aligned} H_\alpha &:= \{v \in V \mid (v, \alpha) = 0\}, \\ A_\alpha &:= \{v \in V \mid (v, \alpha) > 0\}, \\ C &:= \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha, \\ D &:= \overline{C} = \bigcap_{\alpha \in \Delta} (A_\alpha \cup H_\alpha). \end{aligned}$$

Bemerkung: D ist ein geschlossener konvexer Kegel.

Satz 1.12.1 Der Kegel D ist ein Fundamentalbereich für die Operierung von W auf V, d.h. für jeden $v \in V$ existiert ein $v' \in D$, so dass $v' = w(v)$ für ein $w \in W$ gilt. Dieser v' ist eindeutig.

Definition 1.12.2 Für $u \in V$ definieren wir den *Stabilisator* von u in W:

$$\mathrm{St}_W(u) := \{w \in W \mid w(u) = u\}.$$

Für eine Teilmenge $U \subseteq V$ definieren wir den *punktweisen Stabilisator* von U in W:

$$\mathrm{St}^*_W(U) := \{w \in W \mid w(u) = u \text{ für alle } u \in U\}.$$

Wir definieren auch die *Isotropiegruppe* von U in W:

$$\mathrm{St}_W(U) := \{w \in W \mid w(U) \subseteq U\}.$$

Satz 1.12.3 Es gelten die folgenden Aussagen:

1) Ist $w(v_1) = v_2$ für einige $v_1, v_2 \in D$ und $w \in W$, dann gilt:

   a) $v_1 = v_2$,

   b) $w = 1$ oder $w = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_k}$, wobei $\alpha_i \in \Delta$ und $s_{\alpha_i} \in \mathrm{St}_W(v_1)$ ist.

2) Für jeden $v \in V$ gilt: $\mathrm{St}_W(v) = \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in \Phi,\ s_\alpha \in \mathrm{St}_W(v) \rangle$.

3) Für jede Teilmenge $U \subseteq V$ gilt: $\mathrm{St}^*_W(U) = \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in \Phi,\ s_\alpha \in \mathrm{St}^*_W(U) \rangle$.

1.13 Gitter der parabolischen Untergruppen von W

Wir fixieren $\Delta \subset \Phi \subset V$. Für $\Delta' \subseteq \Delta$ sei $W_{\Delta'} = \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta' \rangle$.

Satz 1.13.1 Die Gitter $(\{\Delta' \,|\, \Delta' \subseteq \Delta\}, \cap, \cup)$ und $(\{W_{\Delta'} \,|\, \Delta' \subseteq \Delta\}, \cap, \langle , \rangle)$ sind isomorph. Mit anderen Worten, es gilt:

1) $W_{\Delta' \cup \Delta''} = \langle W_{\Delta'}, W_{\Delta''} \rangle$,

2) $W_{\Delta' \cap \Delta''} = W_{\Delta'} \cap W_{\Delta''}$,

3) Die Abbildung $\Delta' \mapsto W_{\Delta'}$, wobei Δ' durch Teilmengen von Δ läuft, ist injektiv.

1.14 Spiegelungen in W

Satz 1.14.1 Jede Spiegelung in W hat die Form s_α für ein $\alpha \in \Phi$.

1.15 Coxeter-Komplex

Wir fixieren $\Delta \subset \Phi \subset V$. Nehmen wir an, dass $V = \mathrm{Span}(\Delta)$ ist. Die Menge C und der Fundamentalbereich D wurden im Abschnitt 12 definiert:

$$C = \{c \in V \,|\, (c, \alpha) > 0 \ \forall\, \alpha \in \Delta\}.$$
$$D = \{c \in V \,|\, (c, \alpha) \geqslant 0 \ \forall\, \alpha \in \Delta\}.$$

Definition 1.15.1 Für $\Delta' \subseteq \Delta$ sei

$$C_{\Delta'} = \{c \in D \,|\, \begin{array}{l} (c, \alpha) = 0 \ \forall\, \alpha \in \Delta', \\ (c, \alpha) > 0 \ \forall\, \alpha \in \Delta \setminus \Delta'\}. \end{array}$$

Behauptung 1.15.2 Es gelten die folgenden Aussagen:

1) $C_\emptyset = C, \quad C_\Delta = \{0\}$.

2) $\Delta' \neq \Delta''$ impliziert $C_{\Delta'} \cap C_{\Delta''} = \emptyset$ impliziert $D = \coprod\limits_{\Delta' \subseteq \Delta} C_{\Delta'}$.

3)
$$V = \bigcup_{w \in W} w(D) = \bigcup_{w \in W} w\Big(\coprod_{\Delta' \subseteq \Delta} C_{\Delta'}\Big) = \bigcup_{\substack{\Delta' \subseteq \Delta \\ w \in W}} w(C_{\Delta'}).$$

Satz 1.15.3 Für jedes $\Delta' \subseteq \Delta$ gilt $W_{\Delta'} = \mathrm{St}^*_W(C_{\Delta'}) = \mathrm{St}_W(C_{\Delta'})$.

Korollar 1.15.4 Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1) $w_1(C_{\Delta'}) \cap w_2(C_{\Delta''}) \neq \emptyset$.
2) $\Delta' = \Delta''$, $\; w_2^{-1}w_1 \in W_{\Delta'}$.
3) $w_1(C_{\Delta'}) = w_2(C_{\Delta''})$.
4) $w_1 W_{\Delta'} = w_2 W_{\Delta''}$.

Korollar 1.15.5 Es gilt

$$V = \coprod_{\substack{\Delta' \subseteq \Delta \\ w \in W^{\Delta'}}} w(C_{\Delta'}),$$

wobei $W^{\Delta'}$ eine Menge von Repräsentanten der linken Nebenklassen von $W_{\Delta'}$ in W ist.

Definition 1.15.6 .

1) Die Menge

$$\mathcal{C} = \{w(C_{\Delta'}) \,|\, \Delta' \subseteq \Delta, \;\; w \in W^{\Delta'}\}$$

heißt *Coxeter-Komplex* von W.

2) In $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ definieren wir Zellen der Dimensionen von 0 bis $n-1$:

Die 0-dimensionalen Zellen haben die Form $w(C_{\Delta\setminus\{\alpha\}})$, wobei $\alpha \in \Delta$ ist.

Die 1-dimensionalen Zellen haben die Form $w(C_{\Delta\setminus\{\alpha,\beta\}})$, wobei α, β verschiedene Elemente aus Δ sind.

Die $(n-1)$-dimensionalen Zellen haben die Form $w(C_\emptyset)$.

Behauptung 1.15.7 1) Sei $\mathcal{C}^k$ die Menge von k-dimensionalen Zellen von $\mathcal{C}$. Dann gilt

$$\mathcal{C} \setminus \{0\} = \coprod_{k=0}^{n-1} \mathcal{C}^k.$$

2) Der Abschluss jeder k-dimensionalen Zelle von $\mathcal{C}$ enthält genau $(k+1)$ 0-dimensionale Zellen von $\mathcal{C}$. Zum Beispiel enthält der Abschluss der 1-dimensionalen Zelle $w(C_{\Delta\setminus\{\alpha,\beta\}})$ nur zwei 0-dimensionale Zellen, nämlich $w(C_{\Delta\setminus\{\alpha\}})$ und $w(C_{\Delta\setminus\{\beta\}})$.

3) Für $0 \leqslant k_1 \leqslant k$ enthält der Anschluss jeder k-dimensionalen Zelle genau $\binom{k+1}{k_1+1}$ k_1-dimensionale Zellen. So entsteht die *Inzidenzstruktur* von Zellen in $\mathcal{C}$.

4) Es existieren genau $|W|$ $(n-1)$-dimensionale Zellen in $\mathcal{C}$.

Bemerkung. Der (punktweise) Stabilisator der Zelle $w(C_{\Delta'})$ in W ist $wW_{\Delta'}w^{-1}$. Deswegen sind die parabolischen Untergruppen in W nichts anderes als die Stabilisatoren von Zellen des Coxeter-Komplexes.

Definition 1.15.8 Der *abstrakte* Coxeter-Complex $A\mathcal{C}$ von W wird aus $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ durch folgende Ersetzungen erhalten:

die 0-dimensionalen Zellen von $\mathcal{C}$ werden durch Punkte ersetzt,
die 1-dimensionalen Zellen von $\mathcal{C}$ werden durch Kanten ersetzt.
die k-dimensionalen Zellen von $\mathcal{C}$ werden durch k-dimensionale Simplizes ersetzt.
Die Inzidenzstruktur wird von $\mathcal{C}$ übertragen.

Bemerkung. Der abstrakte Coxeter-Komplex $A\mathcal{C}$ von W kann direkt aus W konstruiert werden:

Die 0-dimensionalen Simplizes sind die linken Nebenklassen $wW_{\Delta'}$, wobei $w \in W$ und $|\Delta \setminus \Delta'| = 1$ ist. Im allgemeinen: die k-dimensionalen Simplizes ($0 \leqslant k \leqslant n-1$) sind die linken Nebenklassen $wW_{\Delta'}$, wobei $w \in W$ und $|\Delta \setminus \Delta'| = k+1$ ist.

Für $0 \leqslant k_2 \leqslant k_1$ enthält ein k_1-dimensionales Simplex $w_1 W_{\Delta_1}$ ein k_2-dimensionales Simplex $w_2 W_{\Delta_2}$ genau dann, wenn $w_1 W_{\Delta_1} \subseteq w_2 W_{\Delta_2}$ ist. Das ist äquivalent den Bedingungen $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ und $w_2^{-1} w_1 \in W_{\Delta_2}$.

2 Klassifikation von endlichen Spiegelungsgruppen

2.1 Coxeter-Graphen von endlichen Spiegelungsgruppen

Sei W eine endliche Spiegelungsgruppe, die auf einem Euklidschen Raum V operiert. Sei

$$\Phi := \bigcup_{s_\alpha \in W, ||\alpha||=1} \{\alpha, -\alpha\}.$$

Dann ist Φ ein Wurzelsystem in V und die Weyl-Gruppe von Φ ist gleich W. Sei Δ ein einfaches System in Φ. Wir wissen, dass $S_\Delta := \{s_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta\}$ ein Erzeugersystem von W ist. Auch wissen wir, dass W die folgende Präsentation hat:

$$W = \langle s_\alpha \, (\alpha \in \Delta) \,|\, (s_\alpha s_\beta)^{m_{\alpha,\beta}} = 1 \, (\alpha, \beta \in \Delta) \rangle,$$

wobei $m_{\alpha,\beta} = \mathrm{Ord}_W(s_\alpha s_\beta)$ ist.

Definition 2.1.1 (a) Das Paar (W, S_Δ) heißt *Coxeter-System.*

(b) Der *Coxeter-Graph von W* bezüglich Δ ist ein markierter Graph $\Gamma = \Gamma(W, S_\Delta)$, so dass folgendes gilt:

1) Die Eckpunkte von Γ sind Elemente von Δ.
2) Zwei Eckpunkte α, β sind nur dann mit einer Kante verbunden, wenn $m_{\alpha,\beta} \geqslant 3$ ist.
3) Wenn $m_{\alpha,\beta} \geqslant 4$ ist, dann markieren wir diese Kante mit $m_{\alpha,\beta}$. Die Kanten mit $m_{\alpha,\beta} = 3$ werden entweder mit 3 markiert oder nicht markiert.

Beispiel. Die Diheder-Gruppe D_n und die Permutationsgruppe S_{n+1} wurden als endliche Spiegelungsgruppen in der Vorlesung 1 realisiert.

1) Der Coxeter-Graph von $D_n = \langle t_1, t_2 \,|\, t_1^2 = t_2^2 = 1, (t_1 t_2)^n = 1 \rangle$ ist

$$\circ \overset{n}{\text{—}} \circ$$

2) Der Coxeter-Graph von $S_{n+1} = \langle s_1, \ldots, s_n \,|\, s_i^2 = 1, (s_i s_{i+1})^3 = 1 \rangle$ ist

$$\circ \overset{3}{\text{—}} \circ \cdots \circ \overset{3}{\text{—}} \circ$$

Dabei ist s_i die Transposition $(i, i+1)$.

Lemma 2.1.2 Sei Δ ein normiertes einfaches System eines Wurzelsystems Φ. Dann gilt für je zwei Vektoren $\alpha, \beta \in \Delta$:

$$(\alpha, \beta) = -\cos\Big(\frac{\pi}{m_{\alpha,\beta}}\Big).$$

Satz 2.1.3 Sei W_i eine endliche Spiegelungsgruppe, die auf einem Euklidschen Raum V_i wesentlich operiert ($\mathrm{Fix}(W_i) = \{0\}$) und sei $\Delta_i \subset V_i$ ein normiertes einfaches System für W_i, $i = 1, 2$. Wenn die Coxeter-Graphen $\Gamma(W_1, S_{\Delta_1})$ und $\Gamma(W_2, S_{\Delta_2})$ isomorph sind, dann gilt:

1) Die natürliche Bijektion $\Delta_1 \to \Delta_2$ kann bis zur einer Isometrie $f : V_1 \to V_2$ fortgesetzt werden.
2) Die Abbildung $S_{\Delta_1} \to S_{\Delta_2}$, $s_\alpha \mapsto s_{f(\alpha)}$ kann bis zum einem Isomorphismus $\varphi : W_1 \to W_2$ fortgesetzt werden.
3) Das folgende Diagramm ist für jedes $w \in W_1$ kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{w} & V_1 \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ V_2 & \xrightarrow{\varphi(w)} & V_2 \end{array}$$

2.2 Irreduzible Coxeter-Systeme

Definition 2.2.1 Ein Coxeter-System (W, S_Δ) heißt *irreduzibel*, falls ihr Coxeter-Graph $\Gamma = \Gamma(W, S_\Delta)$ zusammenhängend ist.

Satz 2.2.2 Seien $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ zusammenhängende Komponenten des Coxeter-Graphs $\Gamma = \Gamma(W, S_\Delta)$ und sei Δ_i die Menge der Eckpunkte von Γ_i. Dann gilt:

1) $\Delta = \Delta_1 \sqcup \cdots \sqcup \Delta_k$ und $\Delta_i \perp \Delta_j$ für alle $i \neq j$,

2) $W = W_{\Delta_1} \times \cdots \times W_{\Delta_k}$.

2.3 Abstrakte Coxeter-Graphen und ihre Matrizen

Definition 2.3.1 Ein *abstrakter Coxeter-Graph* ist ein endlicher Graph Γ ohne Zyklen der Länge 2, dessen Kanten mit ganzen Zahlen $n \geqslant 3$ oder mit dem Symbol ∞ markiert sind.

Die Zahl 3 wird oft nicht geschrieben.

Definition 2.3.2 Mit jedem Coxeter-Graph Γ wird eine Matrix $A = A(\Gamma)$ assoziiert:

$$A_{i,j} := -\cos\Big(\frac{\pi}{m_{i,j}}\Big),$$

wobei $m_{i,j}$ wie folgt definiert ist:

a) $m_{i,i} = 1$.
b) Wenn die Eckpunkte i und j ($i \neq j$) nicht mit einer Kante verbunden sind, dann ist $m_{i,j} = 2$.
c) Wenn die Eckpunkte i und j ($i \neq j$) mit einer Kante verbunden sind, dann ist:
- $m_{i,j} = 3$, falls über dieser Kante keine Markierung steht.
- $m_{i,j} = n$, falls über dieser Kante die Markierung n steht.

Satz 2.3.3 Sei (W, S_Δ) ein Coxeter-Paar. Dann gilt

1) Die Coxeter-Matrix $A = A(\Gamma(W, S_\Delta))$ ist symmetrisch und positiv definit.
2) Der Coxeter-Graph $\Gamma(W, S_\Delta)$ ist zusammenhängend genau dann, wenn die Coxeter-Matrix A irreduzibel ist.
3) $A_{ij} \leqslant 0$ für alle $i \neq j$;
   $A_{ii} = 1$ für alle i.

Definition 2.3.4 .

1) Eine symmetrische Matrix $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ heißt *positiv definit*, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt: $x^t A x > 0$.
2) Eine symmetrische Matrix $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ heißt *positiv halbdefinit*, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt: $x^t A x \geqslant 0$.

Behauptung 2.3.5 Sei A eine symmetrische Matrix aus $M(n, n, \mathbb{R})$. Dann gilt:

1) A ist positiv definit genau dann, wenn alle führenden Hauptminoren von A positiv sind.
2) A ist positiv halbdefinit genau dann, wenn alle Hauptminoren von A nichtnegativ sind.

Definition 2.3.6 Eine Matrix $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ heißt *irreduzibel*, falls keine Permutationsmatrix $P \in M(n, n, \mathbb{R})$ existiert, so dass

$$P^t A P = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{pmatrix}$$

mit $X \in M(n_1, n_1, \mathbb{R})$, $Y \in M(n_2, n_2, \mathbb{R})$, $Z \in M(n_2, n_1, \mathbb{R})$, $n_1 > 0$, $n_2 > 0$ ist.

Eine nicht irreduzible Matrix $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ heißt *reduzible*.

Behauptung 2.3.7 Eine Matrix $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ ist irreduzibel genau dann, wenn keine Teilmengen $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $I \neq \emptyset$, $J \neq \emptyset$, $I \bigsqcup J = \{1, \ldots, n\}$ existieren, so dass $A_{i,j} = 0$ für alle $i \in I$ und $j \in J$ gilt.

2.4 Einige abstrakte Coxeter-Graphen, die positiv definiten Matrizen haben

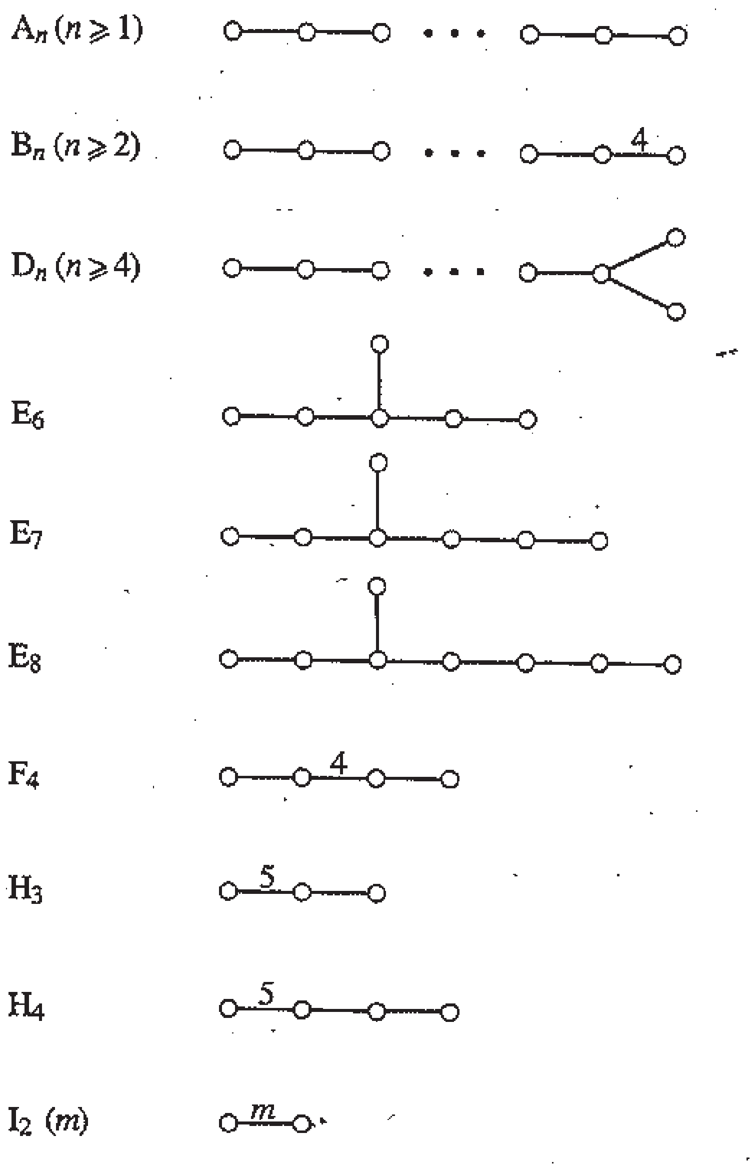
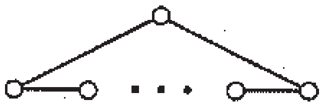


Tabelle 1

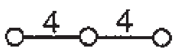
2.5 Einige abstrakte Coxeter-Graphen, die positiv halbdefiniten Matrizen haben

$\widetilde{A}_1$

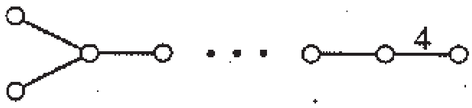
$\widetilde{A}_n$ $(n \geqslant 2)$



$\widetilde{B}_2 = \widetilde{C}_2$

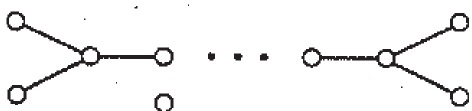


$\widetilde{B}_n$ $(n \geqslant 3)$

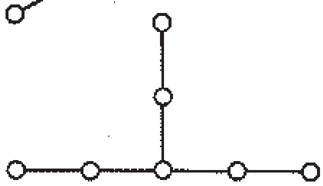


$\widetilde{C}_n$ $(n \geqslant 3)$

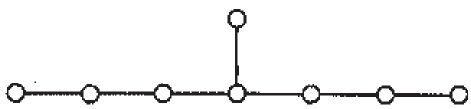
$\widetilde{D}_n$ $(n \geqslant 4)$



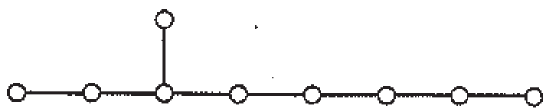
$\widetilde{E}_6$



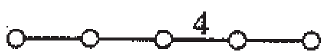
$\widetilde{E}_7$



$\widetilde{E}_8$



$\widetilde{F}_4$



$\widetilde{G}_2$

Tabelle 2

2.6 Klassifikation von positiv halbdefiniten abstrakten Coxeter-Graphen

Definition 2.6.1 Sei Γ ein Coxeter-Graph. Ein Graph Γ' heißt *Untergraph* in Γ, falls man Γ' aus Γ durch folgende Operationen bekommen kann:

1) Wegnehmen einiger Eckpunkte und aller Kanten, die diesen Eckpunkten inzident sind.
2) Verringern der Markierungszahlen.

Satz 2.6.2 Sei $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ eine symmetrische, positiv halbdefinite, irreduzible Matrix mit $A_{i,j} \leqslant 0$ für alle $i \neq j$. Dann gilt:

(a) $N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t Ax = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} =: \mathrm{Eig}(A, 0)$.

(b) $\dim(N) \leqslant 1$.

(c) Wenn $\dim(N) = 1$ ist, dann existiert ein Vektor $v \in N$ mit $v_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Satz 2.6.3 Sei Γ ein zusammenhängender Coxeter-Graph, dessen Coxeter-Matrix $A(\Gamma)$ positiv halbdefinit ist. Ist Γ' ein echter Untergraph von Γ, dann ist $A(\Gamma')$ positiv definit.

Satz 2.6.4 Die Tabellen 1 und 2 enthalten alle zusammenhängenden abstrakten Coxeter-Graphen Γ, dessen Coxeter-Matrizen $A(\Gamma)$ positiv halbedefinit sind.

Beweis. Nehmen wir an, dass ein abstrakter Coxeter-Graph Γ existiert, der diese Bedingungen erfüllt, aber sich nicht in Tabellen 1 und 2 befindet. Sei n die Anzahl der Knoten von Γ und sei m seine naximale Markierungszahl. Mit Hilfe des Satzes 2.6.3 werden wir zeigen, dass seine Untergraphen nicht beliebig sein können. Am Ende des 20. Schrittes bekommen wir einen Widerspruch.

(1) Alle möglichen Γ mit $n = 1, 2$ sind A_1, $I_2(m)$ und $\widetilde{A}_1$. Sie befinden sich in den Tabellen 1 und 2, deswegen gilt $n \geqslant 3$.

(2) Da $\widetilde{A}_1$ nicht ein Untergraph von Γ sein kann, gilt $m < \infty$.

(3) Da $\widetilde{A}_n$ $(n \geqslant 2)$ nicht ein Untergraph von Γ sein kann, enthält Γ kein Zyklus.

`Fall 1.` Sei $m = 3$.

(4) Γ muss einen Verzweigungspunkt enthalten, sonst ist $\Gamma = A_n$.

(5) Γ enthält kein $\widetilde{D}_n$, $n > 4$, deswegen hat Γ einen einzigen Verzweigungspunkt v.

(6) Γ enthält $\widetilde{D}_4$ nicht, deswegen ist $\mathrm{Grad}(v) = 3$. Sei a, b, c die Anzahl von Knoten in Γ, die in drei Komponenten von $\Gamma \setminus \{v\}$ liegen. Sei $a \leqslant b \leqslant c$.

(7) Da $\widetilde{E}_6$ nicht ein Untergraph von Γ sein kann, ist $a = 1$.

(8) Da $\widetilde{E}_7$ nicht ein Untergraph von Γ sein kann, ist $b \leqslant 2$.

(9) Da $\Gamma \neq D_n$ ist, ist $b \neq 1$. Also gilt $b = 2$.

(10) Da $\widetilde{E}_8$ nicht ein Untergraph von Γ sein kann, ist $c \leqslant 4$.

(11) Da $\Gamma \neq E_6, E_7, E_8$ ist, ist $m = 3$ unmöglich.

`Fall 2.` Sei $m \geqslant 4$.

(12) Γ enthält kein $\widetilde{C}_n$, deswegen existiert nur eine Kante, die die Markierung > 3 hat.

(13) Γ enthält kein $\widetilde{B}_n$, deswegen hat Γ keine Verzweigungspunkte. Das widerspricht dem Punkt (4).

`Fall 2.1.` Sei $m = 4$.

(14) Da $\Gamma \neq B_n$ ist, haben zwei äußere Kanten von Γ die Markierung 3.

(15) Da $\widetilde{F}_4$ kein Untergraph von Γ ist, ist $n = 4$.

(16) Da $\Gamma \neq F_4$ ist, ist $m = 4$ unmöglich.

`Fall 2.2.` Sei $m \geqslant 5$.

(17) Da Γ den Graph $\widetilde{G}_2$ nicht enthält, gilt $m = 5$.

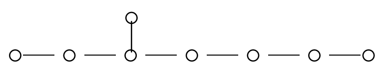
(18) Da Γ den Graph $Z_4 : \circ\!-\!\circ \overset{5}{-} \circ\!-\!\circ$ nicht enthält (Z_4 ist nicht positiv halbdefinit), markiert 5 nur eine äußere Kante.

(19) Da Γ den Graph $Z_5 : \circ \overset{5}{-} \circ\!-\!\circ\!-\!\circ\!-\!\circ$ nicht enthält (Z_5 ist nicht positiv halbdefinit), markiert 5 keine innere Kante.

(20) Es bleibt nur $\Gamma = H_3$ oder $\Gamma = H_4$, was unmöglich nach der Annahme ist.

2.7 Konstruktion der Gruppe E_8

E_8 ist die Spiegelungsgruppe mit dem Coxeter-Graph



Wir betrachten zwei Gitter in $V := \mathbb{R}^8$:

$$L' := \{v \in \mathbb{R}^8 \mid v_i \in \mathbb{Z}\,(i = 1, \ldots, 8), \sum_{i=1}^{8} v_i \in 2\mathbb{Z}\},$$

$$L := L' + \mathbb{Z}\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} e_i\Big).$$

Definition 2.7.1 Sei G ein Gitter in $\mathbb{R}^n$. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von G. Das *Volume* von G ist die Zahl $\mathrm{Vol}(G) := |\det A|$, wobei A die Matrix mit den Spalten $v_1, \ldots, v_n$ ist.

Remark 2.7.2 $\mathrm{Vol}(G)$ hängt von der Wahl der $\mathbb{Z}$-Basis von G nicht ab.

Behauptung 2.7.3 Für jedes $v \in L$ gilt:

1) $\sum_i^8 v_i \in 2\mathbb{Z}$.

2) $|v|^2 \in 2\mathbb{Z}$.

3) $\mathrm{Vol}(L) = 1$.

Sei $\Phi := \{v \in L \,|\, |v|^2 = 2\}$.

Behauptung 2.7.4 Es gilt $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, wobei

$$\Phi_1 := \{\pm e_i \pm e_j \,|\, 1 \leqslant i < j \leqslant 8\},$$

$$\Phi_2 := \{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} c_i e_i \,|\, c_i \in \{-1,1\},\ |\{i \,|\, c_i = 1\}| \in 2\mathbb{Z}\}$$

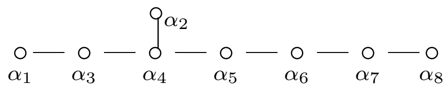
ist. Des weiteren gilt $|\Phi| = 240$.

Behauptung 2.7.5 Φ ist ein Wurzelsystem in $\mathbb{R}^8$.

Behauptung 2.7.6 Das folgende Δ ist ein einfaches System in Φ:
$\Delta := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_8\}$, wobei

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),\\ \alpha_2 &:= e_1 + e_2,\\ \alpha_i &:= e_{i-1} - e_{i-2} \qquad (i = 3, \ldots, 8). \end{aligned}$$

Behauptung 2.7.7 Die Spiegelungsgruppe $W := W_\Phi = \{s_\alpha \,|\, \alpha \in \Phi\}$ hat den folgenden Coxeter-Graph bezüglich Δ:



Insbesondere gilt: $W \cong E_8$.

Beweis. Wir sehen, dass $(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}, \frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}) = -\frac{1}{2}$ ist. Deswegen gilt $m_{\alpha_1,\alpha_3} = 3$. Alle anderen m_{α_i,α_j} können analog berechnet werden.

Behauptung 2.7.8 Die Gruppe W operiert transitiv auf der Menge Φ.

Behauptung 2.7.9 Sei $\widetilde{\alpha} := \alpha_7 + \alpha_8$. Dann gilt:

1) $\widetilde{\alpha}$ ist allen Vektoren aus $\Delta \setminus \{\alpha_8\}$ senkrecht.

2) $|W| = |\Phi| \cdot |\mathrm{St}_W(\widetilde{\alpha})|$.

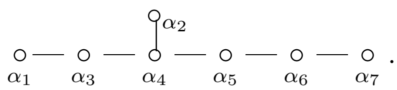
3) $\mathrm{St}_W(\widetilde{\alpha}) = \langle s_\beta \,|\, \beta \in \Phi \cap H_{\widetilde{\alpha}}\rangle$.

4) $\Phi \cap H_{\widetilde{\alpha}}$ ist ein Wurzelsystem in $H_{\widetilde{\alpha}}$.

5) $\Delta \setminus \{\alpha_8\}$ ist ein einfaches System in $\Phi \cap H_{\widetilde{\alpha}}$.

6) $W_{\Phi \cap H_{\widetilde{\alpha}}} = \mathrm{St}_W(\widetilde{\alpha})$.

7) Der Coxeter-Graph von $W_{\Phi \cap H_{\widetilde{\alpha}}}$ ist



8) $|E_8| = 240 \cdot |E_7| = 4! \cdot 6! \cdot 8!$.