Nachklausur Coxetergruppen, WS 13/14 (19.03.14)

(Prof. O. Bogopolski)

Aufgabe 1.

1) Formulieren Sie den Kürzungssatz. [1 Punkt]
2) Definieren Sie das Poincaré-Polynom einer Weyl-Gruppe. [1 Punkt]
3) Malen Sie den Coxeter-Graph von E_8. [1 Punkt]
4) Beweisen Sie folgendes:
   Wenn der Coxeter-Graph $\Gamma = \Gamma(W, S_\Delta)$ nicht zusammenhängend ist, dann ist die Weyl-Gruppe W ein direktes Produkt von kleineren Weyl-Gruppen. [3 Punkte]

Aufgabe 2. In $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachten wir $\Phi := \{e_i - e_j \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n+1\}$. Folgendes ist bekannt:

- $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ist ein einfaches System in Φ, wobei $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ ist.
- Es gibt einen Isomorphismus $\phi : W_\Phi \to S_{n+1}$, so dass $\phi(s_{\alpha_i}) = (i, i+1)$ ist.

Somit ist $X_{n+1} := \{(12), (23), (34), \dots, (n, n+1)\}$ ein Erzeugersystem für S_{n+1}.

1) Finden Sie die Länge des längsten Elements in S_{n+1} bezüglich X_{n+1}. [3 Punkte]
2) Konstruieren Sie ein Element der Länge 7 in S_5 bezüglich X_5. [7 Punkte]

Aufgabe 3. Sei $\mathbf{H} := \mathbb{R}1 + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ der Quaternionenring[1]. Wir identifizieren $\mathbf{H}$ mit $\mathbb{R}^4$ durch $x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Das ermöglicht, $\mathbb{R}^4$ als einen Ring zu betrachten. Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ mit dem Skalarprodukt $(\alpha, \beta) := \frac{1}{2}(\alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha})$.

1) Sei $\alpha \in \mathbf{H}$ ein Element mit $||\alpha|| = 1$. Für die Spiegelung $s_\alpha : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ und $\beta \in \mathbf{H}$ beweisen Sie, dass $s_\alpha(\beta) = -\alpha\overline{\beta}\alpha$ gilt. [3 Punkte]
2) Beweisen Sie, dass jede endliche Untergruppe G von $\mathbf{H}$, die -1 enthält, ein Wurzelsystem in $\mathbf{H}$ ist. [7 Punkte]

   Hinweis: Zuerst beweisen Sie, dass $||\gamma|| = 1$ für alle $\gamma \in G$ gilt. Dann benutzen Sie 1) und die Formel $||\gamma||^2 = \gamma\overline{\gamma}$.

[1]Zur Erinnerung: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$,

$$\begin{array}{lll} ij = k, & jk = i, & ki = j, \\ ji = -k, & kj = -i, & ik = -j. \end{array}$$

Das zu $\gamma = x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ konjugierte Element ist $\overline{\gamma} := x_1 1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k$. Die Norm von γ, $||\gamma||$, wird so definiert:

$$||\gamma||^2 := \gamma\overline{\gamma} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Es gilt

$$||\alpha\beta|| = ||\alpha|| \cdot ||\beta||.$$

3) Seien

$$\gamma_1 := 1 + 0i + 0j + 0k, \qquad \gamma_2 := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k, \qquad \gamma_3 := a + \frac{1}{2}i + bj + 0k,$$

wobei

$$a := \cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \qquad b := \cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

ist. Sei Φ die Menge der Vektoren, die aus $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ durch gerade Permutationen von Koordinaten und durch beliebige (unabhängige) Wechsel der Vorzeichen der Koordinaten entsteht. Es ist bekannt, dass Φ ein Wurzelsystem ist.

Beweisen Sie, dass $|\Phi| = 120$ ist. [3 Punkte]

4) Es ist bekannt, dass die folgenden Vektoren ein einfaches System in Φ bilden:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= a - \tfrac{1}{2}i + bj, \\ \alpha_2 &:= -a + \tfrac{1}{2}i + bj, \\ \alpha_3 &:= \tfrac{1}{2} + bi - aj, \\ \alpha_4 &:= -\tfrac{1}{2} - ai + bk, \end{aligned}$$

Der Coxeter-Graph des Systems hat die Form

$$\circ \overset{n}{\text{—}} \circ \text{—} \circ \text{—} \circ$$

Berechnen Sie n. [7 Punkte]

5) Beweisen Sie, dass die Weyl-Gruppe W_Φ transitiv auf Φ operiert. [6 Punkte]

Hinweis. Reduzieren Sie die Frage zu Δ und beweisen, dass die benachbarten $s_{\alpha_i}, s_{\alpha_{i+1}}$ in $\langle s_{\alpha_i}, s_{\alpha_{i+1}} \rangle$ konjugiert sind.

6) Es ist bekannt, dass $\mathrm{St}_{W_\Phi}(1)$ eine Weyl-Gruppe mit folgendem Coxeter-Graph ist:

$$\circ \overset{5}{\text{—}} \circ \text{—} \circ$$

Berechnen Sie $|\mathrm{St}_{W_\Phi}(1)|$ mit Hilfe der Witt-Formel. [7 Punkte]
Berechnen Sie $|W_\Phi|$. [1 Punkt]