Prof. Dr. Oleg Bogopolski — Abgabe am Mo 20.01.2014, 16:30 Uhr (Üb.)
. oder vor 16:30 Uhr nach Vereinbarung

Coxetergruppen
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Wir haben die Aussagen 1) und 2) in dem Satz 2.1.3 bewiesen (siehe Kurzskript im Netz). Leiten Sie die Aussage 3) aus den Aussagen 1) und 2) ab.

Hinweis. Benutzen Sie den folgenden Fakt: Wenn W auf V wesentlich operiert, dann gilt $\mathrm{Span}(\Delta) = V$.

Aufgabe 2. Mit jedem Coxeter-Graph Γ wird eine Matrix $A = A(\Gamma)$ assoziiert:

$$A_{i,j} := -\cos\Big(\frac{\pi}{m_{i,j}}\Big).$$

Sei Γ der folgende Graph:

$$\circ\!-\!\!-\circ-\!\!-\circ\overset{4}{-\!\!-}\circ$$

1) Berechnen Sie $A(\Gamma)$.
2) Berechnen Sie $\det(A(\Gamma))$.
3) Beweisen Sie, dass $A(\Gamma)$ positiv definite ist.

Hinweis: Nach einer Definition gilt:
a) $m_{i,i} = 1$.
b) Wenn die Eckpunkte i und j ($i \neq j$) nicht mit einer Kante verbunden sind, dann ist $m_{i,j} = 2$.
c) Wenn die Eckpunkte i und j ($i \neq j$) mit einer Kante verbunden sind, dann ist:
- $m_{i,j} = 3$, falls über dieser Kante keine Markierung steht.
- $m_{i,j} = n$, falls über dieser Kante die Markierung n steht.

Aufgabe 3. Sei $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ eine symmetrische, positiv halbdefinite, irreduzible Matrix mit $A_{i,j} \leqslant 0$ für alle $i \neq j$. Dann gilt:

(a) $N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t A x = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} =: \mathrm{Eig}(A, 0)$.

(b) $\dim(N) \leqslant 1$.

(c) Wenn $\dim(N) = 1$ ist, dann existiert ein Vektor $v \in N$ mit $v_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Bei der Skizze des Beweises unten erklären Sie die einzelnen Schritte.
Skizze des Beweises.
Zu (a)

Schritt 1. Die Aussage (a) gilt im Spezialfall, wobei A zusätzlich eine Diagonalmatrix ist.

Schritt 2. Die Aussage (a) kann aus a1) und aus den folgendem Fakt abgeleitet werden:

Für jede symmetrische Matrix A existieren eine Orthogonalmatrix T und eine Diagonalmatrix D mit $A = T^t DT$.

Zu (b)

Schritt 3. Nehmen wir an, dass $\dim(N) \geqslant 1$ ist und sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in N \setminus \{0\}$. Sei

$$z = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}.$$

Dann gilt (erklären Sie die mit $\uparrow$ angezeigten Stellen)

$$0 \underset{\uparrow}{\leqslant} z^t Az = \sum A_{ij} z_i z_j \underset{\uparrow}{\leqslant} \sum A_{ij} x_i x_j = x^t Ax \underset{\uparrow}{=} 0$$

Daraus folgt $z^t Az = 0$ und so gilt $z \in N$.

Schritt 4. Wir beweisen, dass $z > 0$ ist, d.h. $z_i > 0$ für alle i.

Da $x \neq 0$ ist, ist $z \neq 0$ auch. Dann ist $J := \{j \,|\, z_j > 0\} \neq \emptyset$.
Angenommen $I := \{i \,|\, z_i = 0\} \neq \emptyset$ gilt, dann wird A reduzibel (warum?), ein Widerspruch.

Schritt 5. Wir haben gezeigt, dass $x \in N \setminus \{0\}$ das folgende impliziert: $|x| \in N$ und $|x| > 0$. Angenommen $\dim(N) \geqslant 2$ gilt, dann folgt daraus ein Widerspruch (warum?).

Zu (c)

Schritt 6. Die Matrix $(A - \lambda_1 E)$ ist symmetrisch, positiv halbdefinit (warum?) und irreduzibel (warum?). Aus (a) folgt (warum?), dass $\dim(\mathrm{Eig}(A, \lambda_1) = 1$ ist. Die Existenz von $v \in \mathrm{Eig}(A, \lambda_1)$ mit $v > 0$ folgt aus Schritt 4.

`Keine weiteren Aufgaben.`