Prof. Dr. Oleg Bogopolski — Abgabe am Mo 18.11, 16:30 Uhr (Üb.)
. — oder vor 16:30 Uhr nach Vereinbarung

Coxetergruppen
Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$. Aus dem Übungsblatt 1 (Aufgabe 3b) wissen wir, dass das folgende System Ψ ein Wurzelsystem in $\mathbb{R}^3$ ist:

$$\Psi := \{\alpha_i e_i + \alpha_j e_j \,|\, i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j, \alpha_i, \alpha_j \in \{-1, 1\}\}.$$

Wir betrachten die mit Ψ assoziierte Spiegelungsgruppe $W := \langle s_\beta \,|\, \beta \in \Psi\rangle$.

(a) Beweisen Sie, dass W in der Symmetriegruppe eines Würfels liegt.

(b) Beweisen Sie, dass W eine Rotation der Ordnung 3 enthält.

(c) Finden Sie drei Rotationen in W, die jeweils die Ordnung 2 haben und die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ erzeugen.

(d) Beweisen Sie, dass $W \cap \mathrm{Rot}(\mathbb{R}^3)$ die Gruppe A_4 enthält.

Aufgabe 2. In der Vorlesung wurde der folgende Satz formuliert:
Satz. Sei Φ ein Wurzelsystem in V. Für jedes positive System $\prod$ in Φ existiert ein einziges einfaches System Δ mit $\Delta \subseteq \prod \subseteq \Phi$.

Die Existenz von Δ wurde vollständig bewiesen. Einen Beweis der Einzigkeit skizzieren wir hier: Angenommen Δ_1, Δ_2 zwei einfache Systeme in $\prod$. Für ein $v \in \Delta_2 \setminus \Delta_1$ schreiben wir $v = \sum\limits_{\gamma \in \Delta_1} c_\gamma \cdot \gamma$. Dann gilt:

(a) $c_\gamma \geqslant 0$ für alle $\gamma \in \Delta_1$.

(b) Mindestens zwei von c_γ sind positiv.

(c) Sei $T_{\Delta_i}^{\Delta_j}$ die Übergangsmatrix von Δ_i zu Δ_j. Dann ist $T_{\Delta_1}^{\Delta_2} \cdot T_{\Delta_2}^{\Delta_1}$ ungleich der Einheitsmatrix, ein Widerspruch.

Geben Sie alle Details dieses Beweises.

Aufgabe 3. Sei Φ ein Wurzelsystem und Δ ein einfaches System in Φ. Für jede Teilmenge $I \subseteq \Phi$ sei $W_I := \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in I\rangle$. Im Satz 1.5.2 (siehe Kurzskript) haben wir bewiesen, dass $W_\Phi = W_\Delta$ ist. Beweisen Sie, dass $\{s_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta\}$ ein minimales Erzeugersystem für W_Φ ist, d.h. für jedes $\beta \in \Delta$ gilt $W_\Phi \neq W_{\Delta \setminus \{\beta\}}$.

Hinweis. Im Teil (2) des Beweises des Satzes 1.5.2 haben wir bewiesen $W_\Phi(\Delta) = \Phi$. Zeigen Sie, dass $-\beta \notin W_{\Delta\setminus\{\beta\}}(\Delta)$ ist. Dafür benutzen Sie die Formel aus Lemma 1.1.3 des Skripts.

Aufgabe 4. Sei Φ ein Wurzelsystem in $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie das folgende:

(a) Die Anzahl von einfachen Systemen Δ in Φ ist nicht größer als $\binom{|\Phi|}{n}$.

(b) $|W_\Phi| \leqslant \binom{|\Phi|}{n} \cdot n!$.

Hinweis. Für (b) benutzen Sie Behauptung 2) des Satzes 1.4.1 des Kurzskripts.