Lineare Algebra I SoSe 2018

Musterlösung zu Übungsblatt 14

carsten.feldkamp@hhu.de

Aufgabe 1:

(a) ges.: $ggT(84,35)$ (unter Verwendung des eukl. Alg.)

$$84 = 2 \cdot 35 + 14$$
$$35 = 2 \cdot 14 + 7$$
$$14 = 2 \cdot \boxed{7} + 0$$

Somit: $ggT(84,35) = 7$

(b) ges.: $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $84x + 35y = ggT(84,35)$

mithilfe von (a):

$$7 = 35 - 2 \cdot 14 = 35 - 2(84 - 2 \cdot 35)$$
$$= -2 \cdot 84 + 5 \cdot 35$$

Somit: $x = -2$, $y = 5$

(c) ges.: $z \in \mathbb{Z}_{84}$ mit $z \cdot_{84} 35 = 42$

Umformulierung:

ges.: $z \in \mathbb{Z}$ mit $z \cdot 35 + a \cdot 84 = 42$ für ein $a \in \mathbb{Z}$

mithilfe von (b):

$$42 = 6 \cdot 7 = 6(-2 \cdot 84 + 5 \cdot 35)$$
$$= 30 \cdot 35 - 12 \cdot 84$$

Somit $z = 30 \in \mathbb{Z}_{84}$

Aufgabe 2:

geg.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) ges.: det(A)

$$\det(A) \underset{\uparrow}{=} (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Laplace-Entw. nach erster Zeile

$$= -x + 1$$

(b) ges.: alle $x \in \mathbb{R}$ mit $(A^{-1})_{23} = -1$

Wegen $\det A \neq 0$ gilt mit Satz 19.1.2

$$(A^{-1})_{23} = \frac{(-1)^{2+3} \det(A'_{32})}{\det(A)} = \frac{1}{x-1} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x-1}(x-1) = 1$$

Somit existiert kein $x \in \mathbb{R}$ mit $(A^{-1})_{23} = -1$.

Aufgabe 3:

geg.: $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$, $U = \mathcal{L}(u_1, u_2)$, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ges.: Basis von $V \cap U$

Wir lösen:

$$a v_1 + b v_2 = c u_1 + d u_2 \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-3) \\ (-2) \\ \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} (-1) \to \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Parameterunbekannte: d

Es folgt:

$c = -d$, $b = -5c - 2d = 3d$,

$a = 2c + d = -d$

Somit gilt:

$$V \cap U = \{ a v_1 + b v_2 \mid a = -d,\ b = 3d,\ d \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ (-v_1 + 3 v_2) d \mid d \in \mathbb{R} \}$$
$$= \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Aufgabe 4:

(1) geg.: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(a) ges.: EW von A

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 4 \\ 4 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{Laplace-Entw.} \\ \text{nach dritter Zeile}}}{=} (-1)^{3+3} (-2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(\lambda + 2) \left[(2-\lambda)(-3-\lambda) + 4 \right]$$
$$= -(\lambda+2) \underbrace{(\lambda^2 + \lambda - 2)}_{} = -(\lambda+2)^2 (\lambda - 1)$$

NR.: pq-Formel

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$\lambda = 1$ oder $\lambda = -2$

Also lauten die EW: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$

(b) ges.: $\mathrm{Eig}(A, \lambda_i)$ $i \in \{1, 2\}$

zu $\mathrm{Eig}(A, 1)$:

Wir lösen $(A - 1 \cdot E_3) v = 0$ für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-4)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Parameterunbekannte: v_2

Somit: $v_3 = 0$, $v_1 = v_2 - 4v_3 = v_2$

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_2 \;\middle|\; v_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$\Rightarrow$ Basis: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

zu $\mathrm{Eig}(A,-2)$:

Wir lösen $(A-(-2)E_3)\,v = 0$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Parameterunbekannte: v_2, v_3

Somit $4v_1 = v_2 - 4v_3 \iff v_1 = \frac{1}{4}v_2 - v_3$

$$\mathrm{Eig}(A,-2) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4}v_2 - v_3 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; v_2, v_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_3 \;\middle|\; v_2, v_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) \Rightarrow \text{Basis: } \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

(c) Frage: A diagonalisierbar?

Aus (b): $\dim(\mathrm{Eig}(A,\lambda_1)) + \dim(\mathrm{Eig}(A,\lambda_2))$
$= 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

Laut Satz 24.1.8 ist A somit diagonalisierbar.

ges.: $T \in M(3,3,\mathbb{R})$, D Diagonalmatrix mit

$$T^{-1}AT = D$$

Laut der Bem. nach Satz 24.1.8 gilt mit (b):

$$T^{-1}AT = D \text{ für } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\; T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Frage:

Sind $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ähnlich?

B und C sind nicht ähnlich.

Widerspruchsbew.: Sei $T \in M(3,3,\mathbb{R})$ invertierbar mit $C = T^{-1} B T$

Dann gilt:

$$0 = \mathrm{Spur}(C) = \mathrm{Spur}(T^{-1} B T)$$
$$\underset{\uparrow}{=} \mathrm{Spur}(B \cdot T \cdot T^{-1}) = \mathrm{Spur}(B) = 1 \quad \lightning$$

Blatt 10, Aufg. 4 (a)

Aufgabe 5:

geg.: $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x+z \\ z \end{pmatrix}$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ges.: $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, wobei $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$

Es gilt:

$$\varphi(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3$$

$$\varphi(b_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot b_1 - 1 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3$$

$$\varphi(b_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot b_1 - 1 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3$$

Laut Def. 25.1.3 ist nun

$$[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6:

ges.: eine Lösung von $a^2 \equiv 3 \pmod{109}$

Hinweis: $\underbrace{121}_{=11^2} = 12 + 109$

Es reicht, eine Lösung von

$$\underbrace{4a^2}_{=(2a)^2} \equiv \underbrace{3 \cdot 4}_{=12} \pmod{109}$$ zu

finden. Laut Hinweis ist a eine Lösung, falls $2a \equiv 11 \pmod{109}$

$$\Leftrightarrow \quad a \equiv 2^{-1} \cdot 11 \pmod{109}$$

NR.: $2 \cdot 55 = 110 \equiv 1 \pmod{109}$

$\Rightarrow \quad 2^{-1} \equiv 55 \pmod{109}$

Schließlich:

$$a = 55 \cdot 11 = 605 = 60 + 5 \cdot 109$$
$$\equiv 60 \pmod{109}$$

Bem.: Da a nur als Quadrat vorkommt ist auch $-a = -60 \equiv 49 \pmod{109}$ eine Lösung.