

Lineare Algebra I Übungsblatt 4

Definition. Sei M eine nicht-leere Teilmenge einer Gruppe $(G, *)$. Wir betrachten die Teilmenge H von G , die aus Elementen

$$m_1 * m_2 * \cdots * m_k$$

besteht, wobei $m_i \in M$ oder $m_i^{-1} \in M$ für $1 \leq i \leq k$ und $k \in \mathbb{N}$ ist. Man schreibt $H = \langle M \rangle$.

Aufgabe 1.

[4+4 P.]

- (a) Sei M eine nicht-leere Teilmenge einer Gruppe $(G, *)$. Beweisen Sie, dass $\langle M \rangle$ eine Untergruppe von G ist.

Definition. $\langle M \rangle$ heißt die von M erzeugte Untergruppe von G .

- (b) Wir betrachten die Untergruppe $\langle 4, 14 \rangle$ von \mathbb{Z}_{20} . Wie viele Elemente hat diese Untergruppe?

Aufgabe 2.

[8 P.]

Wir betrachten die Untergruppe $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ der Gruppe (S_4, \circ) . Schreiben Sie alle Elemente von U auf.

Aufgabe 3.

[4+4 P.]

- (a) Sei $\varphi : (\mathbb{Z}_8, +_8) \rightarrow (\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ ein Homomorphismus mit $\varphi(1) = 3$. Berechnen Sie $\varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}_8$.
- (b) Geben Sie alle Homomorphismen $\varphi : (\mathbb{Z}_6, +_6) \rightarrow (\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$ an. Begründen Sie, dass Ihre Liste vollständig ist.

Aufgabe 4. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $n\mathbb{Z}$ als die Menge aller ganzen Zahlen, die durch n teilbar sind. Beweisen Sie, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ die Gruppen $(n\mathbb{Z}, +)$ und $(m\mathbb{Z}, +)$ isomorph sind.

[8 P.]

Hinweis. Siehe die Definition 6.1.7 des Kurzschrifts im Netz.

Aufgabe 5. Beweisen Sie, dass die Gruppen $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ nicht isomorph sind.

[8 P.]