Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe Mi, 18.07, 10:15 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 14
(Eine Musterklausur ohne Aufgabe 0 (Multiple Choice))

Aufgabe 1. [2+3+3P.]

(a) Verwenden Sie den euklidischen Algorithmus, um den größten gemeinsamen Teiler von 84 und 35 zu bestimmen.

(b) Finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $84x + 35y = ggT(84, 35)$.

(c) Bestimmen Sie ein Element $z \in \mathbb{Z}_{84}$, für das $z \cdot_{84} 35 = 42$ erfüllt ist.

Aufgabe 2. Sei $x \in \mathbb{R}$ und [3+3P.]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$.

(b) Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die $(A^{-1})_{23} = -1$ ist.

Aufgabe 3. Seien $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ und $U = \mathcal{L}(u_1, u_2)$ zwei Unterräume in $\mathbb{R}^3$, wobei [6 P.]

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist. Finden Sie eine Basis des Schnitts $V \cap U$.

Aufgabe 4. [8+4P.]
(1) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert λ eine Basis des zugehörigen Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$.

(c) Entscheiden Sie, ob die Matrix A diagonalisierbar ist. Wenn ja, finden Sie eine invertierbare Matrix $T \in M(3, 3, \mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix D, so dass $T^{-1}AT = D$ ist.

(2) Sind die folgenden Matrizen ähnlich?

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5. [8 P.]

Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x+z \\ z \end{pmatrix}$

und die Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$.

Die Aufgabe 6 gehört nicht zur Musterklausur.
Sie ist für dijenigen, denen 5 Punkte fehlen.

Aufgabe 6. Wenn Pinocchio eine Email von Malvina bekommen hat, dass [5 P.]
$121 = 12 + 109$ ist, war er sehr verwundert. Finden Sie eine Lösung der Gleichung

$$a^2 \equiv 3 \pmod{109}.$$

Ich wünsche Euch viel Erfolg!