

Lineare Algebra I
Übungsblatt 11

Aufgabe 1.

[3+5P.]

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die folgende Matrix:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $A_1 = (1)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\det A_n$ für $n = 1, 2, 3, 4$.

(b) Geben Sie eine explizite Formel für $\det A_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ an und beweisen Sie diese.

Aufgabe 2.

[8P.]

Seien $b_1, c_1, \dots, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ und sei $A \in M(n, n, K)$ mit $A_{ij} = b_i + c_j$, $1 \leq i, j \leq n$. Berechnen Sie $\det A$.

Aufgabe 3.

[4+4P.]

Berechnen Sie die Determinante der Matrix aus der Aufgabe 4(a) mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes:

- (a) Entwicklung nach der zweiten Spalte.
- (b) Entwicklung nach der dritten Zeile.

Hinweis. Siehe Vorlesung 19 im Skript.

Aufgabe 4.

[4+4P.]

- (a) Berechnen Sie die inverse Matrix der reellen Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
- (b) Berechnen Sie die inverse Matrix der reellen Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Siehe Satz 19.1.3 und ein Beispiel danach im Skript.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 5. Beweisen Sie, dass die Inverse zu einer oberen Dreiecksmatrix $A \in M(n, n, K)$ mit $\det A \neq 0$ wieder eine obere Dreiecksmatrix ist. [8P.]

Definition. Eine Matrix $A \in M(n, n, K)$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, falls $A_{i,j} = 0$ für alle $1 \leq j < i \leq n$ ist.