Lösungen zu Übungsblatt 14

Aufgabe 1. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, versehen mit einer symmetrischen Bilinearform $\Phi : V \times V \to K$. Die Teilmenge

$$V_0 := \{x \in V \mid \Phi(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in V\}$$

heißt *Radikal* der Bilinearform (Bezeichnung: $\mathbf{Rad}(\Phi)$). Man sagt, dass Φ *nichtentartet* ist, wenn $\mathbf{Rad}(\Phi) = \{0\}$ ist. Es ist leicht zu sehen, dass V_0 ein Untervektorraum von V ist. Beweisen Sie:

(a) Die Formel

$$\Psi(x + V_0, y + V_0) := \Phi(x, y)$$

gibt eine wohldefinierte Bilinearform auf dem Faktorraum V/V_0.

(b) Ψ ist nichtentartet.

Lösung.
(a) Angenommen $x + V_0 = x' + V_0$ und $y + V_0 = y' + V_0$.
Insbesondere gilt $x' = x + u$ und $y' = y + v$ für einige $u, v \in V_0$.

Wir müssen zeigen, dass

$$\Psi(x + V_0, y + V_0) = \Psi(x' + V_0, y' + V_0)$$

gilt. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} \Psi(x + V_0, y + V_0) &= \Phi(x, y), \\ \Psi(x' + V_0, y' + V_0) &= \Phi(x', y'). \end{aligned}$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$\Phi(x', y') = \Phi(x, y)$$

gilt. Das stimmt, weil

$$\begin{aligned} \Phi(x', y') = \Phi(x + u, y + v) &= \Phi(x, y) + \Phi(x, v) + \Phi(u, y) + \Phi(u, v), \\ &= \Phi(x, y) + \underbrace{\Phi(v, x)}_{0} + \underbrace{\Phi(u, y)}_{0} + \underbrace{\Phi(u, v)}_{0} = \Phi(x, y) \end{aligned}$$

wegen $v \in V_0$ und $u \in V_0$ ist.

(b)

$$\begin{aligned} & x + V_0 \in \mathbf{Rad}(\Psi) \\ \Leftrightarrow\ & \Psi(x + V_0, y + V_0) = 0 && \forall (y + V_0) \in V/V_0 \\ \Leftrightarrow\ & \Phi(x, y) = 0 && \forall y \in V \\ \Leftrightarrow\ & x \in \mathbf{Rad}(\Phi) \\ \Leftrightarrow\ & x \in V_0 \\ \Leftrightarrow\ & x + V_0 = 0 && \text{in } V/V_0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Beweisen Sie, dass die kanonische lineare Abbildung

$$\Psi : V^* \otimes V \to \mathbf{End}(V), \quad f \otimes v \mapsto (x \mapsto f(x)v)$$

bijektiv ist.

Lösung.
Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V. Sei $e_1^*, \ldots, e_n^*$ die Dualbasis in V^*.
Die Abbildung Ψ ist surjektiv:
Sei $\varphi \in \mathbf{End}(V)$. Eine Berechnung zeigt, dass $\Psi(x) = \varphi$ gilt für

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \otimes \varphi(e_i).$$

Die Injektivität von Ψ folgt aus dem Vergleich der Dimensionen:

$$\dim(V^* \otimes V) = \dim(V^*) \cdot \dim(V) = (\dim(V))^2 = \dim(\mathbf{End}(V)).$$

Aufgabe 3. Wie lautet die Jordanform für das Kroneker-Produkt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

aufgefasst als Endomorphismus von $\mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2 \cong \mathbb{Q}^4$?

Lösung.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Wir haben $\chi_A(x) = (x-6)^4$,
$\mathbf{Rang}(A - 6E) = 2$ und $\mathbf{Rang}((A - 6E)^2) = 1$. Deswegen ist

$$J = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Seien V und W zwei K-Vektorräume und seien V^* und W^* ihre Dualräume. Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Für jedes Funktional $f \in W^*$ definieren wir ein Funktional $\widetilde{f} \in V^*$ wie folgt:

$$\widetilde{f}(v) := f(\varphi(v)), \;\; v \in V.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^* : \;\; & W^* \to V^* \\ & f \mapsto \widetilde{f} \end{aligned}$$

heißt *duale Abbildung* zu φ.

Aufgabe 4. [11 P.]

Seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ entsprechend. Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $\varphi^* : W^* \to V^*$ die duale Abbildung zu φ. Beweisen Sie, dass die Darstellungsmatrizen $[\varphi]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ und $[\varphi^*]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}$ zueinander transponiert sind.

Hinweis. Hier sind $\mathcal{A}^*$ und $\mathcal{B}^*$ die Dualbasen zu $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, s. Satz 12.2.2. des Kurzskripts.

Lösung. Sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$. Sei

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) \;\; &= a_{11}w_1 + \dots + a_{1m}w_m, \\ \dots \\ \varphi(v_n) \;\; &= a_{n1}w_1 + \dots + a_{nm}w_m. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$[\varphi]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Sei

$$\begin{aligned} \varphi^*(w_1^*) \;\; &= b_{11}v_1^* + \dots + b_{1n}v_n^*, \\ \dots \\ \varphi^*(w_m^*) \;\; &= b_{m1}v_1^* + \dots + b_{mn}v_n^*. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$[\varphi^*]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt

$$\varphi^*(w_i^*)(v_j) = (b_{i1}v_1^* + \dots + b_{in}v_n^*)(v_j) = b_{ij}.$$

Aus Definition von φ^* folgt

$$\varphi^*(w_i^*)(v_j) = w_i^*(\varphi(v_j)) = w_i^*(a_{j1}w_1 + \dots + a_{jm}w_m) = a_{ji}.$$

Deswegen gilt $b_{ij} = a_{ji}$. Also sind die Darstellungsmatrizen $[\varphi]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ und $[\varphi^*]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}$ zueinander transponiert.