Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe 29.06. Besprechung: 5.07 und 6.07

Lineare Algebra II

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. [4+4+6 P.]

(a) Sei $n \geqslant 1$. Beweisen Sie, dass das Polynom

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

nur einfache Nullstellen besitzt.

(b) Beweisen Sie, dass alle Nullstellen von $f(x)$ im Kreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant n! + 1\}$ liegen.

(c) Beweisen Sie, dass alle Nullstellen von $f(x)$ außerhalb des Kreises $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant \frac{1}{2}\}$ liegen.

Aufgabe 2. [4+4+4 P.]

(a) Drücken Sie $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ als ein Polynom von elementaren symmetrischen Polynomen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ aus.

(b) Beweisen Sie, dass

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3}{x_1 + x_2 + x_3}$$

ein Polynom ist.

(c) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ Nullstellen des Polynoms $x^3 - x^2 + 2x - 3 \in \mathbb{C}[x]$. Berechnen Sie

$$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3.$$

Sei $m := x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ ein Monom.

- Der *Grad* des Monoms m ist die Zahl $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$.
- Das Monom m heißt *leitend*, wenn $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_n$ ist.
- Wir bezeichnen
$$S(m) := \sigma_1^{k_1-k_2} \sigma_2^{k_2-k_3} \dots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} \sigma_n^{k_n}.$$
- Sei $f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ mit $a_n \neq 0$ und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ alle Nullstellen von $f(x)$ (jede Nullstelle ist so viele mal geschrieben, wie ihre Vielfachheit ist). Die Zahl
$$Dis(f) := a_n^{2n-2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$
heißt *Diskriminante* des Polynoms f. Es ist klar, dass $Dis(f)$ symmetrisch und somit ein Polynom von Koeffizienten von $f(x)$ ist. Die Diskriminante $Dis(f)$ ist genau dann gleich 0, wenn f mehrfache Nullstellen besitzt.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 3. [4+4+6+4 P.]

(a) Für $f(x) = x^2 + px + q$ berechnen Sie $Dis(f)$.

(b) Für $m_1 = x_1^4 x_2^2 x_3^0$ geben Sie die längste Kette normierter Monome $m_1, \ldots, m_\ell \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ mit folgenden drei Eigenschaften:

   (a) $m_1 \succ m_2 \succ \cdots \succ m_\ell$.

   (b) Alle diese Monome sind leitend.

   (c) Alle diese Monome haben den gleichen Grad.

(c) Aus dem Eliminierungsprozess (s. Beweis des Satzes 9.5) folgt, dass

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 = S(m_1) + a_2 S(m_2) + \cdots + a_\ell S(m_\ell)$$

für einige Koeffizienten $a_2, \ldots, a_\ell \in \mathbb{R}$ ist. Finden Sie diese Koeffizienten, indem Sie verschiedene konkrete Werte für x_1, x_2, x_3 in die Gleichung substituieren und anschließend ein lineares Gleichungssystem lösen.

(d) Für $f(x) = x^3 + px + q$ beweisen Sie:

$$Dis(f) = -4p^3 - 27q^2.$$

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, der $\mathbb{C}$ enthält. Beweisen Sie ohne Anwendung des Hauptsatzes von Algebra: Wenn $\alpha, \beta \in K$ und $\alpha + \beta \in \mathbb{C}$ und $\alpha\beta \in \mathbb{C}$ ist, dann gilt $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. [4 P.]