Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matthias Köhne

Abgabe Di, 19.01, 14:00 Uhr

Lineare Algebra I

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. [4+6P.]

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die folgende Matrix:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $A_1 = (1)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\det A_n$ für $n = 1, 2, 3, 4$.

(b) Geben Sie eine explizite Formel für $\det A_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ an und beweisen Sie diese.

Aufgabe 2. [4+4P.]

Berechnen Sie die Determinante der Matrix A aus der Aufgabe 3 mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes:

(a) Entwicklung nach der zweiten Spalte.

(b) Entwicklung nach der dritten Zeile.

Aufgabe 3. Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen: [4+4P.]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Matrix A^{-1} mit Hilfe des Satzes 19.1.3 des Kurzskriptes; siehe ein Beispiel dort.

(b) Berechnen Sie die Zahl $(B^{-1})_{23}$ mit Hilfe des Satzes 19.1.2 des Kurzskriptes.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass die Inverse zu einer oberen Dreiecksmatrix $A \in M(n,n,K)$ mit $\det A \neq 0$ wieder eine obere Dreiecksmatrix ist. [6P.]

Definition. Eine Matrix $A \in M(n,n,K)$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, falls $A_{i,j} = 0$ für alle $1 \leqslant j < i \leqslant n$ ist.

Aufgabe 5. Berechnen Sie den Rang der reellen Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2\lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & 3\lambda \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von dem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. [8P.]