Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matthias Köhne

Abgabe Mi, 12.01, 14:00 Uhr

Aufgaben 2 und 5 sind besonders wichtig.

Lineare Algebra I

Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Stellen Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ in der Form [8P.]

$$A = B_s \cdot \ldots \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot \mathbf{D} \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_t$$

dar, wobei $B_1, \ldots, B_s, C_1, \ldots, C_t$ Elementarmatrizen aus $M(3,3,\mathbb{R})$ sind und $\mathbf{D}$ eine Diagonalmatrix aus $M(3,3,\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle Lösungen des inhomogenen reellen Gleichungssystems: [8P.]

$$\begin{cases} & & 3x_3 & + & 6x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & -6x_4 & = & 5 \end{cases}$$

Hinweis: Siehe Vorlesung 16.

Definition. Sei $A = (a_{ij}) \in M(n,n,K)$. Die Matrix A heißt *obere Dreiecksmatrix*, falls $a_{ij} = 0$ für alle Indizes mit $i > j$ gilt. Die Matrix A heißt *untere Dreiecksmatrix*, falls $a_{ij} = 0$ für alle Indizes mit $i < j$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in M(3,3,\mathbb{R})$. [4+4P.]

(a) Finden Sie Elementarmatrizen $S_1, S_2, S_3 \in M(3,3,\mathbb{R})$ der Form $E_{ij}(\alpha)$ mit $i > j$, so dass $S_3 \cdot S_2 \cdot S_1 \cdot A = R$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Finden Sie eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R mit $A = L \cdot R$.

Hinweis: Für Aufgabenteil (a) kann die Behauptung 15.1.8(a) des Kurzskriptes nützlich sein.

Fortsetzung Seite 2.

Definition. Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n,n,K)$ ist die *Spur* definiert als die Summe ihrer Diagonalelemente, also

$$\mathrm{Spur}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und seien A, B, T drei Matrizen in $M(n,n,K)$. [4+4P.]
Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Spur}(B \cdot T) = \mathrm{Spur}(T \cdot B)$.

(b) Falls T invertierbar ist, so gilt $\mathrm{Spur}(T^{-1} \cdot A \cdot T) = \mathrm{Spur}(A)$.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabenteil (a) um (b) zu zeigen.

In Aufgabe 5 benutzen Sie die Eigenschaften (D1)-(D9) aus der Vorlesung 17 des Kurzskriptes.

Aufgabe 5. Berechnen Sie folgende Determinanten. [2+3+3P.]

(a) $\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$