Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matthias Köhne

Keine Abgabe. Besprechung: 28.10 und 29.10

Lineare Algebra I
Übungsblatt 0

Aufgabe 1. Seien A, B und C Mengen. Beweisen Sie, wie im Satz 1.1.1 der Vorlesung (also kein graphischer Beweis), dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)\,.$$

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass für die Mengen A, B und C stets die Gleichung

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

erfüllt ist.

Hinweis: Zum Beweis können die Sätze 1.1.2 und 1.1.1 aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 3. Beweisen Sie per Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie per Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 2$ die Ungleichung

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

erfüllt ist.

Aufgabe 5. Sei M eine endliche Menge mit n Elementen. Weiter sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $k \leqslant n$. Beweisen Sie:

$$|\mathcal{P}_k(M)| = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$