Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: Fr., 4.06.2021, bis 8:45 Uhr

Kummertheorie und der Fermat'sche Satz
(SoSe 2021)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. **10P**
Beweisen Sie, dass $a + b\sqrt[3]{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ eine ganze Zahl in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ genau dann ist, wenn $a, b \in \mathbb{Z}$ ist.

Hinweis: Analysieren Sie $m_\alpha(x)$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper. Geben Sie ein Beispiel eines Ideals in $K[x, y]$, das kein Hauptideal ist. **3P**

Aufgabe 3. **5+5P**

a) Beweisen Sie, dass der Faktorring $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ dem Körper $\mathbb{C}$ isomorph ist.

b) Beweisen Sie: Wenn $p(x) = x^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ irreduzibel ist, dann gilt

$$\mathbb{R}[x]/(p(x)) \cong \mathbb{C}.$$

Aufgabe 4. Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Beweisen Sie: **9P**
Ein $x \in R \setminus \{0\}$ ist genau dann prim, wenn das von x erzeugte Hauptideal $(x) := xR$ prim ist.