Fuchssche Gruppen, WiSe 2014/15

(Prof. Dr. O. Bogopolski)

1 Hyperbolische Geometrie

1.1 Hyperbolische Metrik

Die *hyperbolische* (oder Lobachevsky) *Ebene* ist das Paar $(\mathbb{H}, h)$, wobei

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

die "obere" offene Halbebene der komplexen Zahlen und h eine bestimmte Funktion ist (siehe unten), die jeder C^1-Kurve γ in $\mathbb{H}$ eine nichtnegative reelle Zahl $h(\gamma)$ zuordnet.

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}$ eine C^1-Kurve, d.h. $\gamma'(t)$ existiert für alle $t \in [0,1]$ und ist stetig. Wir schreiben

$$\gamma(t) = \underbrace{x(t) + iy(t)}_{z(t)}, \quad t \in [0,1].$$

Die *hyperbolische Länge* von γ wird folgendermaßen definiert:

$$h(\gamma) := \int_0^1 \frac{\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}}{y(t)}\, dt = \int_0^1 \frac{|z'(t)|}{\mathrm{Im}(z(t))}\, dt.$$

Der *hyperbolische Abstand* zwischen zwei Punkten $z, w \in \mathbb{H}$ ist

$$\rho(z,w) := \inf h(\gamma),$$

wobei γ über die Menge aller C^1-Kurven von z bis w läuft.

Behauptung 1.1.1 Die Funktion $\rho : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ ist eine Metrik auf $\mathbb{H}$, d.h. ρ erfüllt die folgenden Axiome:

1) $\rho(z,z) = 0$ und $\rho(z,w) > 0$ falls $z \neq w$,
2) $\rho(z,w) = \rho(w,z)$,
3) $\rho(z,w) \leqslant \rho(z,\zeta) + \rho(\zeta,w)$.

Beweis. 1) wird im Satz 1.2.7 bewiesen, 3) wird in Folgerung 1.2.9 bewiesen. Wir beweisen 2). Sei $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [0,1]$, eine C^1-Kurve von z bis w. Wir definieren $s(t) := 1 - t$. Dann ist $\gamma_1(t) := \gamma(s(t)) = x(s(t)) + y(s(t))$, $t \in [0,1]$, eine C^1-Kurve von w

bis z. In der folgenden Berechnung benutzen wir die Kettenregel für die Differenzierung und die Substitutionsregel für die Integrierung.

$$h(\gamma_1) := \int_0^1 \frac{\left|(\gamma_1'(t)\right|}{y_1(t)}\,dt = \int_0^1 \frac{\left|\gamma'(s(t))\cdot s'(t)\right|}{y(s(t))}\,dt = \int_0^1 \frac{\left|\gamma'(s(t))\right|}{y(s(t))}\,dt$$

$$= -\int_0^1 \frac{\left|\gamma'(s(t))\right|}{y(s(t))}\cdot s'(t)\,dt = -\int_1^0 \frac{\left|\gamma'(s)\right|}{y(s)}\,ds = \int_0^1 \frac{\left|\gamma'(s)\right|}{y(s)}\,ds = h(\gamma).$$

□

1.2 Die Gruppe der Möbius-Transformationen

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, d.h. $a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{C} \cup \{\infty\} &\to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z &\mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

heißt mit A assoziierte *Möbius-Transformation* von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dabei ist

$$\frac{a\infty + b}{c\infty + d} := \begin{cases} a/c, & \text{falls } c \neq 0 \text{ ist,} \\ \infty, & \text{falls } c = 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Merken wir an:

$$T_A \circ T_B = T_{AB}, \qquad T_E = id, \tag{1.2.1}$$

wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet. Die Gruppe

$$\text{Möb}_{\mathbb{C}} := \{T_A \mid A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\}$$

bezüglich der Komposition heißt *Gruppe der Möbius-Transformationen* von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Die Teilmenge

$$\text{Möb}_{\mathbb{R}} := \{T_A \mid A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\}$$

ist eine Untergruppe von $\text{Möb}_{\mathbb{C}}$.

Satz 1.2.1 Jede Transformation $T_A \in \text{Möb}_{\mathbb{R}}$ bildet die Menge $\mathbb{H}$ homöomorph auf sich ab.

Beweis. Wir bezeichnen $w = T_A(z)$. Dann gilt

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2},$$

$$\mathrm{Im}(w) = \frac{w - \bar{w}}{2i} = \frac{z - \bar{z}}{2i|cz+d|^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}. \tag{1.2.2}$$

Daraus folgt: Ist $\mathrm{Im}(z) > 0$, dann ist $\mathrm{Im}(w) > 0$. Deshalb bildet T_A die Menge $\mathbb{H}$ auf sich. Die Bijektivität von $(T_A)_{|\mathbb{H}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ folgt aus der Formel $(T_A)_{|\mathbb{H}} \circ (T_{A^{-1}})_{|\mathbb{H}} = id_{|\mathbb{H}}$. Die Stetigkeit von $(T_A)_{|\mathbb{H}}$ und von der inversen Abbildung $(T_{A^{-1}})_{|\mathbb{H}}$ ist offensichtlich. □

Definition 1.2.2 .

1) Durch $(\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$ wird die Menge der auf $\mathbb{H}$ eingeschränkten Abbildungen aus $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$ bezeichnet.

2) Durch $Z(G)$ wird das *Zentrum* der Gruppe G bezeichnet. Es gilt:

$$Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) = \{\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \qquad Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) = \{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

3) Die Gruppen

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})).$$

heißen *projektive allgemeine lineare Gruppe* und *projektive spezielle lineare Gruppe*.

Satz 1.2.3 $(\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}} \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) &\to (\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}} \\ A &\mapsto (T_A)_{|\mathbb{H}} \end{aligned}$$

ist ein Epimorphismus mit $\mathrm{Ker}\phi = \{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. Deswegen gilt

$$(\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{Ker}\phi \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

□

Satz 1.2.4 Die Transformationen aus $(\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$ erhalten die hyperbolischen Längen der C^1-Kurven in $\mathbb{H}$.

Beweis. Sei

$$\begin{aligned} T : \mathbb{H} &\to \mathbb{H}, \\ z &\mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

eine Transformation aus $(\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$ mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Sei $z(t) = x(t)+iy(t)$ eine differenzierbare Kurve in $\mathbb{H}$. Wir betrachten $w(t) := T(z(t))$. Nun beweisen wir $h(w) = h(z)$:

$$h(w) = \int_0^1 \frac{\left|w'(t)\right|}{\mathrm{Im}(w(t))}\, dt = \int_0^1 \frac{\left|T'(z(t)) \cdot z'(t)\right|}{\mathrm{Im}(T(z(t)))}\, dt. \tag{1.2.3}$$

Dabei gilt

$$T'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Wir substituieren das in die Formel (1.2.2). Dann gilt

$$\left|T'(z)\right| = \frac{\operatorname{Im}(T(z))}{\operatorname{Im}(z)}. \tag{1.2.4}$$

Mit Hilfe der Formel (1.2.3) bekommen wir

$$h(w) = \int_0^1 \frac{\left|z'(t)\right|}{\operatorname{Im}(z(t))}\, dt = h(z).$$

□

Definition 1.2.5 a) Sei I_r der offene euklidsche Strahl in $\mathbb{H}$, der im Punkt der reellen Achse mit der x-Koordinate r startet und senkrecht zur Achse läuft.

b) Sei K_{r_1,r_2} der offene euklidsche Halbkreis in $\mathbb{H}$, dessen Endpunkte auf der reellen Achse liegen und die x-Koordinaten r_1 und r_2 haben ($r_1 < r_2$).

Diese Strahlen und Halbkreise heißen *Geodäten* in $\mathbb{H}$.

c) Für je zwei verschiedene Punkte z_1, z_2 in $\mathbb{H}$ definieren wir eine Kurve $[z_1, z_2]$ in $\mathbb{H}$ mit Anfang z_1 und Ende z_2:

Fall 1. $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$.

Dann existiert ein eindeutiger Strahl I_r, der z_1, z_2 enthält. Sei $[z_1, z_2]$ das Segment dieses Strahls von z_1 bis z_2.

Fall 2. $\operatorname{Re}(z_1) \neq \operatorname{Re}(z_2)$.

Dann existiert ein eindeutiger euklidscher Halbkreis K_{r_1,r_2}, der z_1, z_2 enthält. Sei $[z_1, z_2]$ der Bogen dieses Halbkreises von z_1 bis z_2.

In beiden Fälle heißt $[z_1, z_2]$ *geodätes Segment* von z_1 bis z_2.

Lemma 1.2.6 .

a) Es existiert eine Transformation aus $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$, die I_r auf I_0 abbildet.

b) Es existiert eine Transformation aus $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$, die $K(r_1, r_2)$ auf I_0 abbildet.

Satz 1.2.7 Seien z_1 und z_2 zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{H}$ und sei γ eine beliebige C^1-Kurve in $\mathbb{H}$ von z_1 bis z_2. Dann gilt:

1) $h(\gamma) \geqslant h([z_1, z_2]) > 0$;

2) $h(\gamma) = h([z_1, z_2])$ gilt genau dann, wenn $\gamma = [z_1, z_2]$ gilt.

Beweis. 1) Nach Lemma 1.2.6 und Satz 1.2.4, kann man annehmen, dass $z_1 = ia$ und $z_2 = ib$ ($b > 0$) gilt. Mit der Bezeichnung $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ erhalten wir

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}}{y(t)}\, dt \geqslant \int_0^1 \frac{\left|y'(t)\right|}{y(t)}\, dt \geqslant \left|\int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)}\, dt\right| = \left|\ln(y(t))\Big|_0^1\right| = \left|\ln \frac{\operatorname{Im}(z_2)}{\operatorname{Im}(z_1)}\right| = \ln \frac{b}{a}\ .$$

Jetzt beweisen wir, dass

$$h([z_1, z_2]) = \ln \frac{b}{a}$$

gilt. Dafür parametrisieren wir das Segment $\gamma_1 = [z_1, z_2]$ wie folgt: $\gamma_1(t) = i(a + t(b-a))$, $t \in [0,1]$. Dann haben wir

$$h(\gamma_1) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))}\, dt = \int_0^1 \frac{b-a}{a+t(b-a)}\, dt = \ln(a+t(b-a))\Big|_0^1 = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}\ .$$

Die Behauptung 1) ist bewiesen; 2) folgt aus dem Beweis von 1). $\square$

Bemerkung 1.2.8 Sei γ eine C^1-Kurve in $\mathbb{H}$ von z_1 bis z_2. Dann gilt

$$h(\gamma) \geqslant \left|\ln \frac{\operatorname{Im}(z_2)}{\operatorname{Im}(z_1)}\right|.$$

Insbesondere gilt

$$\rho(z_1, z_2) \geqslant \left|\ln \frac{\operatorname{Im}(z_2)}{\operatorname{Im}(z_1)}\right|.$$

Folgerung 1.2.9 .

1) Für je zwei Punkte z_1, z_2 in $\mathbb{H}$ gilt

$$\rho(z_1, z_2) = h([z_1, z_2]).$$

2) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, gilt

$$\rho(ia, ib) = \ln \frac{b}{a}.$$

3) Für je drei Punkte z_1, z_2, z_3 in $\mathbb{H}$ gilt

$$\rho(z_1, z_3) \leqslant \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3).$$

Die Gleichung gilt genau dann, wenn $z_2 \in [z_1, z_3]$ ist.

Beweis.
1) folgt aus dem Satz 1.2.7. Die Behauptung 2) wurde im Beweis des Satzes 1.2.7 bewiesen.
3) O.B.d.A, $z_1 = ia$, $z_3 = ib$ $(b > a)$. Dann gilt

$$\rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \geqslant \left|\ln \frac{\operatorname{Im}(z_2)}{\operatorname{Im}(z_1)}\right| + \left|\ln \frac{\operatorname{Im}(z_3)}{\operatorname{Im}(z_2)}\right| \geqslant \ln \frac{\operatorname{Im}(z_2)}{\operatorname{Im}(z_1)} + \ln \frac{\operatorname{Im}(z_3)}{\operatorname{Im}(z_2)} = \ln \frac{\operatorname{Im}(z_3)}{\operatorname{Im}(z_1)} = \ln \frac{b}{a} = \rho(z_1, z_3).$$

$\square$

1.3 Einige Formeln für die hyperbolische Metrik ρ auf $\mathbb{H}$

Definition 1.3.1 Die Menge $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt *Riemansche Sphere.* Das *Doppelverhältnis* von vier verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ ist

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}.$$

Lemma 1.3.2 Es gilt $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \langle \{A_r, B_r \mid r \in \mathbb{R}\} \rangle = \langle \{A_r \mid r \in \mathbb{R}\} \cup \{C\} \rangle$, wobei

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

Folgerung 1.3.3 Es gilt $\text{Möb}_{\mathbb{R}} = \langle \{\varphi_r \mid r \in \mathbb{R}\} \cup \{\psi\} \rangle$, wobei

$$\begin{aligned} \varphi_r : &\quad z \to z + r, \\ \psi : &\quad z \mapsto -\frac{1}{z} \end{aligned}$$

ist.

Bemerkung 1.3.4 Es gibt noch einige nützliche Abbildungen aus $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$:

$$\theta_k : z \mapsto kz \quad (k \in \mathbb{R}_+).$$

Satz 1.3.5 Das Doppelverhältnis ist $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$-invariant.

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Folgerung 1.3.3. □

Satz 1.3.6 Seien z, w zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{H}$. Seien z^* und w^* die Enden der Geodäte, die durch z und w läuft. Wir nehmen an, dass die Reihenfolge der vier Punkte in der Geodäte z^*, z, w, w^* ist (siehe Fig.1). Dann gilt:

$$\rho(z, w) = \ln(w, z^*; z, w^*).$$

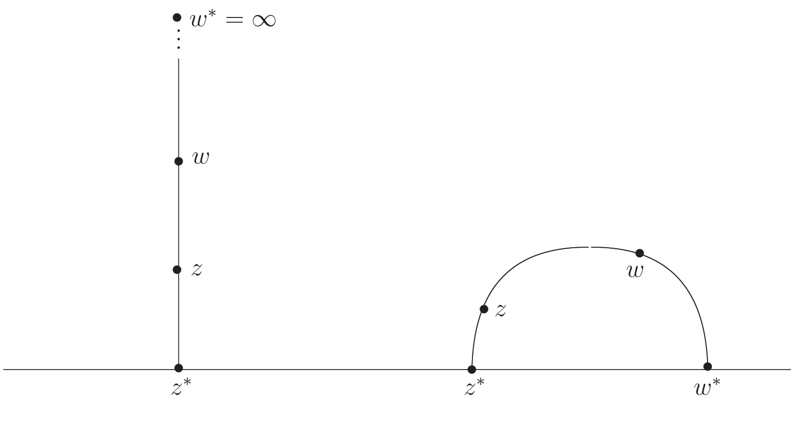

Fig. 1.

Beweis. Nach Lemma 1.2.6 existiert ein $T \in \text{Möb}_{\mathbb{R}}$, das die Geodäte auf die imaginäre Achse abbildet. Mit Hilfe von Abbildungen θ_k und ψ und mit Hilfe des Satzes 1.3.5, können wir annehmen, dass $T(z^*) = 0$, $T(w^*) = \infty$ gilt. Dann gilt $T(z) = ia$ und $T(w) = ib$ für einige $0 < a < b$. Nach Folgerung 1.2.9 gilt

$$\rho(z, w) = \rho(T(z), T(w)) = \rho(ia, ib) = \ln \frac{b}{a}.$$

Es gilt auch

$$(w, z^*; z, w^*) = (T(w), T(z^*); T(z), T(w^*)) = (ib, 0; ia, \infty) = \frac{(ib - 0)(ia - \infty)}{(0 - ia)(\infty - ib)} = \frac{b}{a}.$$

□

Definition 1.3.7 Wir definieren die folgenden drei Funktionen aus $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(t) :&= \frac{e^t + e^{-t}}{2} && \text{(hyperbolischer Cosinus)},\\
\operatorname{sh}(t) :&= \frac{e^t - e^{-t}}{2} && \text{(hyperbolischer Sinus)},\\
\operatorname{th}(t) :&= \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} && \text{(hyperbolischer Tangens)}
\end{aligned}$$

Satz 1.3.8 Für je zwei Punkte $z, w \in \mathbb{H}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \rho(z, w) &&= \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|};\\
&(2) \quad \operatorname{ch} \rho(z, w) &&= 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)};\\
&(3) \quad \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} \rho(z, w)\right] &&= \frac{|z - w|}{2 (\operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w))^{1/2}};\\
&(4) \quad \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} \rho(z, w)\right] &&= \frac{|z - \bar{w}|}{2 (\operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w))^{1/2}};\\
&(5) \quad \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} \rho(z, w)\right] &&= \left|\frac{z - w}{z - \bar{w}}\right|.
\end{aligned}$$

Beweis. Man kann direkt zeigen, dass diese Gleichungen äquivalent sind. Deswegen genügt es, die Gleichung (3) zu beweisen.

Nach Satz 1.2.4 ist die linke Seite von (3) $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$-invariant. Mit Hilfe der Folgerung 1.3.3 überprüfen wir, dass die rechte Seite von (3) auch $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$-invariant ist. Die rechte Seite von (3) ist offensichtlich φ_r-invariant. Wir überprüfen, dass sie ψ-invariant ist:

$$\frac{|\psi(z) - \psi(w)|}{2 (\operatorname{Im}(\psi(z)) \operatorname{Im}(\psi(w)))^{1/2}} = \frac{\left|\frac{-1}{z} - \frac{-1}{w}\right|}{2 \left(\operatorname{Im}(\frac{-1}{z}) \operatorname{Im}(\frac{-1}{w})\right)^{1/2}} = \frac{\left|\frac{-1}{z} - \frac{-1}{w}\right|}{2 \left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2} \frac{\operatorname{Im}(w)}{|w|^2}\right)^{1/2}} = \frac{|z - w|}{2 (\operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w))^{1/2}}.$$

Deswegen, nach der Anwendung eines passenden $T \in \text{Möb}_{\mathbb{R}}$, können wir annehmen, dass $z = ia, w = ib$ $(a < b)$ ist. Mit der Formel $\rho(ia, ib) = \ln \frac{b}{a}$ ist (3) leicht zu überprüfen. □

1.4 Isometrien von $\mathbb{H}$

Definition 1.4.1 Eine Abbildung $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ heißt *Isometrie*, falls $\rho(f(z_1), f(z_2)) = \rho(z_1, z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ gilt.

Die Menge aller Isometrien der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$ bildet eine Gruppe.[1] Diese Gruppe wird mit $\mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ bezeichnet.

Lemma 1.4.2 1) Es gilt $(\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}} \leqslant \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$.
2) Isometrien bilden Geodäten auf Geodäten ab.

Beweis. 1) folgt aus dem Satz 1.2.4. Wir beweisen 2). Sei $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$. Mit Hilfe des Satzes 1.2.9 haben wir

$$\begin{aligned} z_2 \in [z_1, z_3] \quad &\Leftrightarrow \rho(z_1, z_3) = \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \\ &\Leftrightarrow \rho(\varphi(z_1), \varphi(z_3)) = \rho(\varphi(z_1), \varphi(z_2)) + \rho(\varphi(z_2), \varphi(z_3)) \\ &\Leftrightarrow \varphi(z_2) \in [\varphi(z_1), \varphi(z_3)]. \end{aligned}$$

Dann folgt die Behauptung 2) aus dem Fakt, dass Geodäten Vereinigungen von geodäten Segmenten sind. $\square$

Satz 1.4.3 Wir betrachten die Abbldung $\eta : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto -\bar{z}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Isom}(\mathbb{H}) \quad &= \langle (\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}, \eta \rangle \\ &\cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}) \leqslant \langle (\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}, \eta \rangle$. Sei $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$. Dann bildet φ Geodäten auf Geodäten ab. Sei $I := \{ir \,|\, r > 0\}$. Dann ist $\varphi(I)$ eine Geodäte. Nach Lemma 1.2.6 existiert ein $T \in (\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$, so dass $T \circ \varphi(I) = I$ ist. Dank der Abbildungen $z \mapsto kz$ $(k > 0)$ und $z \mapsto -\frac{1}{z}$ kann man annehmen, dass $T \circ \varphi$ den Punkt i fixiert und die Achsen $(0, i]$ und $[i, \infty)$ auf sich abbildet. Daraus folgt, dass die Isometrie $T \circ \varphi$ alle Punkte auf I fixiert. Sei $z = x + iy \in \mathbb{H}$ und sei $T \circ \varphi(z) = u + iv$. Dann gilt für alle $t > 0$:

$$\rho(x + iy, it) = \rho(T \circ \varphi(z), T \circ \varphi(it)) = \rho(u + iv, it).$$

Nach Satz 1.3.8 (3) folgt

$$\frac{x^2 + (y - t)^2}{ty} = \frac{u^2 + (v - t)^2}{tv}.$$

Daraus folgt $v = y$ und $x = \pm u$. Also gilt $T \circ \varphi(z) \in \{z, -\bar{z}\}$. Da jede Isometrie stetig ist, ist $T \circ \varphi$ entweder trivial oder η. $\square$

[1] Das wird aber klar nur nach Satz 1.4.3.

1.5 Hyperbolischer Flächeninhalt

Definition 1.5.1 Sei A eine offene Menge in $\mathbb{H}$. Der *hyperbolische Flächeninhalt* von A wird mit folgender Formel definiert:

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

In dem Integral soll A als eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ betrachtet werden.

Bemerkung 1.5.2 *(Transformationsformel)*

- Sei A eine offene Menge in $\mathbb{R}^2$.
- Sei $\varphi : A \to \mathbb{R}^2$ eine injektive differenzierbare Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen. Wir schreiben $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ mit $\varphi_i : A \to \mathbb{R}$ und benutzen Jacobian von φ:

$$J(\varphi) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

- Sei $f : \varphi(A) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion f auf $\varphi(A)$ integrierbar genau dann wenn die Funktion $(f \circ \varphi) \cdot \big|J(\varphi)\big|$ auf A integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\varphi(A)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A (f \circ \varphi)(x,y) \cdot \Big|J(\varphi)(x,y)\Big| dx\,dy.$$

Satz 1.5.3 Für alle offene Teilmengen $A \subseteq \mathbb{H}$ und alle $T \in (\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$ gilt

$$\mu(T(A)) = \mu(A).$$

Beweis. Sei

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc = 1),$$

Wir schreiben $z = x + iy$. Dann existieren Funktionen u, v mit $T(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Da T komplex-differenzierbar (holomorph) ist, gelten die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen berechnen wir das Jacobian der Abbildung

$$\varphi : (x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y)).$$

$$J(\varphi) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2 = \Big|\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big|^2 = \Big|\frac{dT}{dz}\Big|^2 = \frac{1}{|cz+d|^4}.$$

Dann gilt[2]

$$\mu(T(A)) = \int_{T(A)} \frac{dx\,dy}{(\mathrm{Im}(z))^2} = \int_A \frac{1}{(\mathrm{Im}(T(z)))^2} \cdot |J(T)|\,dx\,dy$$

$$\overset{(1.2.2)}{=} \int_A \frac{|cz+d|^4}{(\mathrm{Im}(z))^2} \cdot \frac{1}{|cz+d|^4}\,dx\,dy = \mu(A).$$

□

1.6 Winkel in $\mathbb{H}$

Definition 1.6.1 Seien $\gamma_1 : [c_1, d_1] \to \mathbb{H}$ und $\gamma_2 : [c_2, d_2] \to \mathbb{H}$ zwei injektive diffrenzierbare Kurven in $\mathbb{H}$, die durch einen gemeisamen Punkt z laufen. Der *hyperbolische Winkel* zwischen γ_1 und γ_2 in z ist der euklidische Winkel zwischen den Tangenten ζ_1 und ζ_2 zu diesen Kurven im Punkt z:

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2; z) := \angle_{\mathrm{e}}(\zeta_1, \zeta_2; z).$$

Satz 1.6.2 Die Transformationen aus $T \in (\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$ sind konform, d.h. sie sind orientierungserhaltend und sie erhalten die Winkel zwischen C^1-Kurven:

$$\angle(T(\gamma_1), T(\gamma_2); T(z)) = \angle(\gamma_1, \gamma_2; z).$$

1.7 Gauß-Bonnet Formel

Ein *hyperbolisches n-Eck* in $\mathbb{H}$ ist eine abgeschlossene Menge, die von n hyperbolischen Segmenten der Form $[z, w]$ begrenzt ist. Man betrachtet auch *hyperbolische n-Ecke* in der Erweiterung $\overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Satz 1.7.1 (Gauß-Bonnet) Sei Δ ein hyperbolisches Dreieck in $\overline{\mathbb{H}}$ mit den Winkeln α, β, γ. Dann gilt

$$\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Beweis. Sei $\Delta = ABC$.

Fall 1. Sei $A, B \in \mathbb{H}$ und $C \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Da die Möbiustransformationen die Flächeninhalte und Winkel erhalten, kann angenommen werden, dass $C = \infty$ ist.

Dann leigt die Seite AB auf einem Halbkreis K_{r_1,r_2}. Es kann angenommen werden, dass 0 das Zentrum von K_{r_1,r_2} ist. Sei R Radius dieses Halbkreises. Die Seiten AC und BC sind vertikale Strahlen. Seien a und b die x-Koordinaten dieser Strahlen. Dann gilt

$$\mu(\Delta) = \int_\Delta \frac{dxdy}{y^2} = \int_a^b dx \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^\infty \frac{dy}{y^2} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

[2]In dem Fall ist $f : (x,y) \mapsto \frac{1}{y^2}$ und $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v)$.

Nach Substitution $x = R\cos\theta$ erhalten wir

$$\mu(\Delta) = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin\,\theta\, d\theta}{\sin\,\theta} = \pi - \alpha - \beta.$$

Fall 2. Sei $A, B, C \in \mathbb{H}$.
Fall 3. Sei $A \in \mathbb{H}$ und $B, C \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
Fall 4. Sei $A, B, C \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Diese Fäle können zu Fall 1 reduziert werden. □

1.8 Hyperbolische Trigonometrie

Satz 1.8.1 Sei Δ ein geodätes Dreieck mit endlichen hyperbolischen Längen der Seiten a, b, c und gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ, die ungleich Null sind. Dann gilt:

(1) $\dfrac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \dfrac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \dfrac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}$. (Sinussatz)

(2) $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b\, \cos\gamma$. (Erster Cosinussatz)

(3) $\operatorname{ch} c = \dfrac{\cos\alpha\, \cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\, \sin\beta}$. (Zweiter Cosinussatz)

Satz 1.8.2 Wenn zwei Dreicke in $\mathbb{H}$ gleiche Winkel haben, dann existiert eine Isometrie, die ein Dreieck nach dem andren abbildet.

Satz 1.8.3 (Pythagoras Satz für $\mathbb{H}$) Ist $\gamma = \frac{\pi}{2}$, dann gilt

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b.$$

2 Fuchssche Gruppen

2.1 Klassifikation von Elementen aus $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Definition 2.1.1 Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ein Element der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $A \neq \pm E$. Die Zahl

$$\mathrm{Tr}(A) := a + c$$

heißt *Spur* von A.
- A heißt *elliptisch*, falls $|\mathrm{Tr}(A)| < 2$ ist.
- A heißt *parabolisch*, falls $|\mathrm{Tr}(A)| = 2$ ist.
- A heißt *hyperbolisch*, falls $|\mathrm{Tr}(A)| > 2$ ist.

Ein Element aus $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ heißt elliptisch, parabolisch, oder hyperbolisch, falls sein beliebiges Urbild in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ so ist.

Lemma 2.1.2 Für jede Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $A \neq \pm E$ gilt:

1) A ist hyperbolisch genau dann, wenn A zwei verschiedene reelle Eigenwerte hat. In diesem Fall ist A zur Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq \pm 1,$$

in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ konjugiert.

2) A ist parabolisch genau dann, wenn A ein Eigenwert $\lambda \in \{-1, 1\}$ der Vielfachheit 2 hat. In diesem Fall ist A der Matrix der Form

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ konjugiert.

3) A ist elliptisch genau dann, wenn A zwei komplex-konjugierte Eigenwerte aus $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ hat. In diesem Fall ist A der Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ konjugiert, wobei $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ ist.

Definition 2.1.3 Das Element $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ operiert auf $\mathbb{H}$ durch $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Seine *Fixpunktmenge* in $\mathbb{H}$ ist

$$\mathrm{Fix}(A) := \{z \in \mathbb{H} \,|\, z = \frac{az + b}{cz + d}\}.$$

Auch operiert A auf der kompaktifizierten hyperbolischen Ebene $\widehat{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$. Seine Fixpunktmenge in $\widehat{\mathbb{H}}$ werden mit $\widehat{\mathrm{Fix}}(A)$ bezeichnet.

Satz 2.1.4 Sei $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Dann gilt:

1) Ist A hyperbolisch, dann besteht $\widehat{\mathrm{Fix}}(A)$ aus zwei Punkten. Sie liegen in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Einer der Fixpunkte ist *abstoßend*, der andere ist *anziehend*.

2) Ist A parabolisch, dann besteht $\widehat{\mathrm{Fix}}(A)$ aus einem Punkt. Der liegt in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

3) Ist A elliptisch, dann besteht $\widehat{\mathrm{Fix}}(A)$ aus aus einem Punkt. Der liegt in $\mathbb{H}$.

Definition 2.1.5 Sei $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ hyperbolisch. Die Geodäte in $\mathbb{H}$, die die zwei Fixpunkte von A verbindet, heißt *Achse* von A und wird mit $\mathrm{Achse}(A)$ bezeichnet.

Bemerkung 2.1.6 Sei $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ hyperbolisch. Da Möbiustransformationen Geodäten auf Geodäten abbilden (siehe Satz 1.4.2), und da nur eine Geodäte durch zwei gegebene Punkte läuft, bildet A die $\mathrm{Achse}(A)$ auf sich ab:

$$A\big(\mathrm{Achse}(A)\big) = \mathrm{Achse}(A).$$

Bemerkung 2.1.7 Die Fixpunkte ermöglichen, Operierungen der hyperbolischen, elliptischen und parabolischen Transformationen qualitativ zu beschreiben.

Bemerkung 2.1.8 Das Element $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ fixiert ∞ genau dann, wenn $c = 0$ ist. Wenn es so ist, dann hat die entsprechende Transformation $\varphi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Form $z \mapsto a^2 z + ba$. Dabei gilt:

- Ist $a = \pm 1$, dann ist A parabolisch.
- Ist $a \neq \pm 1$, dann ist A hyperbolisch mit $\mathrm{Fix}(A) = \{\infty, \dfrac{ba}{1-a^2}\}$.

Abschnitte 2.2 und 2.3 enthalten notwendige Informationen über topologische Räume und topologische Gruppen.

2.2 Topologische Räume

Definition 2.2.1 (Topologie, topologischer Raum, offene und abgeschlossene Mengen)

Sei X eine Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Menge $\mathfrak{T}$ von Teilmengen von X (jede solche Teilmenge heißt *offene* Menge in X), die folgende Axiome erfüllt:

(1) Die leere Menge $\varnothing$ und X sind offen.

(2) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist eine offene Menge.

(3) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist eine offene Menge.

Eine Menge X zusammen mit einer Topologie $\mathfrak{T}$ auf X heißt *topologischer Raum* $(X, \mathfrak{T})$. Man schreibt kurz X, wenn man $\mathfrak{T}$ nicht beschreiben möchte. Eine Teilmenge U von X heißt *abgeschlossen*, falls $X \setminus U$ offen ist.

Definition 2.2.2 (Basis einer Topologie)

Ein System B von Teilmengen eines topologischen Raumes $(X, \mathfrak{T})$ heißt *Basis* der Topologie, wenn folgendes gilt:

(1) Jede Menge aus B ist offen bez. $\mathfrak{T}$ (mit anderen Worten gilt $B \subseteq \mathfrak{T}$).

(2) Jede offene Menge von X bez. $\mathfrak{T}$ ist Vereinigung einiger Mengen aus B.

Definition 2.2.3 (Umgebung)

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und sei $x \in X$. Eine Teilmenge U von X heißt *Umgebung* von x, wenn eine offene Menge $\mathcal{O}$ mit $x \in \mathcal{O} \subset U$ existiert.

Definition 2.2.4 (stetige Abbildung)

Seien $(X_1, \mathfrak{T}_1)$ und $(X_2, \mathfrak{T}_2)$ zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$ heißt *stetig*, wenn für jede offene Menge U in X_2 ihr Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X_1 ist.

Definition 2.2.5 (induzierte Topologie und Faktortopologie)

(1) Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und sei Y eine Teilmenge von X. Wir definieren auf Y *induzierte Topologie* $\mathfrak{T}_Y$ so: Eine Teilmenge $S \subset Y$ wird als offen in Y deklariert, wenn eine offene Menge $\mathcal{O}$ in X mit $S = \mathcal{O} \cap Y$ existiert.

(2) Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und sei Y eine Menge. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren auf Y die *Faktortopologie* so: Eine Teilmenge $U \subset Y$ wird als offen in Y deklariert genau dann, wenn $f^{-1}(U)$ offen in X ist.

Merken wir an: wenn Y die Faktortopologie besitzt, dann wird $f : X \to Y$ stetig. Die Faktortopologie auf Y ist die gröbste Topologie auf Y, für die f stetig ist.

Definition 2.2.6 (diskreter Raum und diskrete Teilmenge)

(1) Ein topologischer Raum X mit der Topologie $\mathfrak{T}$ heißt *diskret*, falls eine von zwei äquivalenten Aussagen gilt:

  (a) für jeden Punkt $x \in X$ ist die Menge $\{x\}$ offen.

  (b) Jede Teilmenge von X ist offen.

(2) Eine Teilmenge X eines topologischen Raums Y heißt *diskret*, wenn X mit der induzierten Topologie diskret ist. Das ist äquivalent dazu, dass es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Menge $\mathcal{O}_x$ in Y gibt, so dass $\mathcal{O}_x \cap X = \{x\}$ ist.

Definition 2.2.7 (Hausdorff-Raum) Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{T})$ heißt Hausdorff-Raum, wenn für je zwei verschiedene Punkte x_1 und x_2 in X offene Mengen $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ existieren, für die folgendes gilt:

$$x_1 \in \mathcal{O}_1, \quad x_2 \in \mathcal{O}_2 \quad \text{und} \quad \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \varnothing.$$

Definition 2.2.8 (Erstes Abzählbarkeitsaxiom) Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{T})$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom (ist *erstabzählbar*), wenn folgendes gilt:

Für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine höchstens abzählbare Menge von offenen Mengen $U_1, U_2, \ldots$ von x, so dass zu jeder Umgebung U von x ein U_i mit $U_i \subseteq U$ existiert.

Bemerkung 2.2.9 (Stetigkeit und abzählbare Folgen)

(1) Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und sei $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ sein Unterraum mit induzierter Topologie. Dann gilt:

  (i) Die identische Abbildung $\mathrm{id} : Y \to X$ ist stetig.

  (ii) Ist $(X, \mathfrak{T})$ erstabzählbar, dann ist $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ auch erstabzählbar.

  (iii) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Y und sei $y \in Y$. Dann gilt $y_n \to y$ in $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ genau dann wenn $y_n \to y$ in $(X, \mathfrak{T})$ gilt.

(2) Seien $(X_1, \mathfrak{T}_1)$ und $(X_2, \mathfrak{T}_2)$ zwei topologische Räume. Sei $f : X_1 \to X_2$ eine Abbildung. Dann folgt (b) aus (a), wobei gilt:

  (a) Die Abbildung f ist stetig.

  (b) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X_1 und jedes $x \in X_1$ gilt: Ist $x_n \to x$ in $(X_1, \mathfrak{T}_1)$, dann ist $f(x_n) \to f(x)$ in $(X_2, \mathfrak{T}_2)$.

  Ist $(X, \mathfrak{T})$ erstabzählbar, dann sind (a) und (b) äquivalent.

Bemerkung 2.2.10 (Kriterium der Diskretheit) Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein erstabzählbarer topologischer Raum. Dann ist der Raum diskret genau dann, wenn für jeden Punkt x und jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x$ folgendes gilt: $x_n = x$ für alle groß genug n.

Definition 2.2.11 (Kompakte Räume und kompakte Teilmengen)

(1) Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{T})$ heißt *kompakt*, wenn für jede Uberdeckung $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ mit $U_i \in \mathfrak{T}$ eine endliche Teilmenge $I_0 \subseteq I$ mit $X = \bigcup\limits_{i\in I_0} U_i$ existiert.

(2) Eine Teilmenge Y eines topologischen Raums $(X, \mathfrak{T})$ heißt *kompakt*, wenn eine der zwei äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

  (a) $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ ist ein kompakter Raum.

  (b) Für jede Überdeckung $Y \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ mit $U_i \in \mathfrak{T}$ eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ mit $Y \subseteq \bigcup\limits_{i\in I_0} U_i$ existiert.

Bemerkung 2.2.12 (Kompaktheit für metrische Räume)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $r > 0$ und $x \in X$ heißt

$$B_r(x) := \{x' \in X \,|\, d(x, x') < r\}$$

offene Kugel mit Radius r und Zentrum x. Eine Teilmenge Y in X heißt *beschränkt*, wenn Y in einer der offenen Kugeln liegt.

Wir definieren Topolgie $\mathfrak{T}$ auf X so, dass die Menge $\{B_r(x) \,|\, x \in X, r > 0\}$ Basis von $\mathfrak{T}$ ist. Dann gilt:

(1) Der topologische Raum $(X, \mathfrak{T})$ ist Hausdorffsch und erstabzählbar.

(2) Eine Teilmenge Y in $\mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn Y abgeschlossen und beschränkt ist.

Lemma 2.2.13 Jede diskrete und abgeschlossene Teilmenge M eines kompakten topologischen Raumes X ist endlich.

Beweis. Für jedes $m \in M$ sei $O(m)$ eine Umgebung von m in X mit $O(m) \cap M = \{m\}$. Dann ist

$$X = (X \setminus M) \cup (\bigcup_{m \in M} O(m))$$

eine Überlagerung von X mit offenen Mengen. Da X kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $M_0 \subseteq M$ mit

$$X = (X \setminus M) \cup (\bigcup_{m \in M_0} O(m)).$$

Dann gilt

$$M = (\bigcup_{m \in M_0} O(m)) \cap M = \bigcup_{m \in M_0} (O(m) \cap M) = M_0.$$

□

Definition 2.2.14 (Produkttopologie)
Seien $(X_1, \mathfrak{T}_1)$ und $(X_2, \mathfrak{T}_2)$ zwei topologische Räume. Die *Produkttopologie* $\mathfrak{T}$ auf $X_1 \times X_2$ besteht aus allen möglichen Vereinigungen der Mengen der Form $U \times V$, wobei $U \in \mathfrak{T}_1$ und $V \in \mathfrak{T}_2$ ist.

Bemerkung 2.2.15 Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie auf $X_1 \times X_2$, für die die Projektionen $\mathrm{pr}_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ und $\mathrm{pr}_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ stetig sind.

2.3 Topologische Gruppen

Definition 2.3.1 Eine Gruppe G, die gleichzeitig ein topologischer Raum ist, heißt *topologische Gruppe*, falls die Abbildungen $\cdot : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$ und $^{-1} : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ stetig sind.

Definition 2.3.2 Eine Untergruppe H einer topologischen Gruppe G heißt *diskret* in G, falls H diskret als Teilmenge des topologischen Raums G ist.

Beispiel 2.3.3 Wir betrachten $[0, 1]$ als topologischen Raum mit der Topologie, die von kanonischer Topologie auf $\mathbb{R}$ induziert ist. Der Raum ist Hausdorffsch und kompakt. Die Teilmenge $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ des topologischen Raumes $[0, 1]$ ist diskret, aber nicht abgeschlossen.

Satz 2.3.4 Jede diskrete Untergruppe H einer Hausdorffschen topologischen Gruppe G ist abgeschlossen.

Beweis. Sei $h_1, h_2, \ldots$ eine Folge von Elementen aus H, die gegen ein $g \in G$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass g in H liegt.

Es ist klar, dass die Folge $h_1 g^{-1}, h_2 g^{-1}, \ldots$ gegen 1 konvergiert. Dann gilt: Für jede Umgebung U von 1 existiert eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(U)$, so dass $h_n g^{-1} \in U$ für alle $n \geqslant n_0$ ist.

Sei V eine beliebige Umgebung von 1. Dann existiert eine Umgebung U von 1 mit $U \cdot U^{-1} \subseteq V$ (Aufgabe). Dann gilt $h_k g^{-1} \cdot (h_l g^{-1})^{-1} = h_k h_l^{-1} \in V$ für alle $k, l \geqslant n_0$.

Da $1 \in H$ ist und H diskret in G ist, existiert eine Umgebung V von 1, so dass $V \cap H = \{1\}$ ist. Dann gilt $h_k h_l^{-1} = 1$ für alle $k, l \geqslant n_0$. Also gilt $h_k = h_l$ für alle $k, l \geqslant n_0$. Wir bezeichnen dieses Element mit h. Dann ist $h \in H$ und die Folge $h_1, h_2, \ldots$ konvergiert gegen h. In jedem Hausdorffschen Raum ist aber der Limes einer Folge eindeutig. Deswegen gilt $g = h \in H$. □

Folgerung 2.3.5 Jede diskrete Untergruppe H einer Hausdorffschen kompakten topologischen Gruppe G ist endlich.

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 2.3.4 und Lemma 2.2.13. □

Folgerung 2.3.6 Jede diskrete Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(n)$ ist endlich.

Bemerkung 2.3.7 (Kriterium der Diskretheit einer topologischen Gruppe) Sei G eine topologische Gruppe mit erstabzählbarer Topologie. Dann gilt:

Eine Untergruppe H von G ist diskret in G genau dann, wenn aus $h_n \to e$ (wobei $h_n \in H$ ist und e das neutrale Element ist) folgt, dass $h_n = e$ für alle groß genug n ist.

2.4 Fuchssche Gruppen

Definition 2.4.1 (Topologie auf $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$)

Wir identifizieren $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{R}^4$ durch

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d)$$

Dadurch werden eine *Norm* und eine *Metrik* auf $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ definiert:

$$||A|| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

$$d(A, B) := ||A - B||.$$

Mit dieser Metrik ist $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ein topologischer Raum. Mit Hilfe des Epimorphismus

$$\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$$

ist Faktortopologie auf $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ definiert. Die *Konvergenz* in dieser Topologie wird folgendermaßen ausgedrückt: in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ gilt

$$g_n \to g$$

genau dann, wenn Matrizen A_n in $\varphi^{-1}(g_n)$ und A in $\varphi^{-1}(g)$ existieren, für die

$$\lim_{n\to\infty} ||A_n - A|| = 0$$

gilt.

Bemerkung 2.4.2 Die topologische Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ist Hausdorffsch und erstabzählbar.

Definition 2.4.3 (erste Definition der Fuchsschen Gruppen)

Eine *Fuchssche Gruppe* ist eine diskrete Untergruppe von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Da $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ erstabzählbar ist, ist diese Definition der folgenden äquivalent.

Definition 2.4.4 (zweite Definition der Fuchsschen Gruppen)

Eine Untergruppe $G \leqslant \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ heißt Fuchssche Gruppe, falls aus $g_n \to e$ (wobei $g_n \in G$ ist und e das neutrale Element ist) folgt, dass $g_n = e$ für alle groß genug n gilt.

2.5 Total unzusammenhängende Operierungen von Gruppen

Sei X ein metrischer Raum und sei $G \leqslant \mathrm{Isom}(X)$.

Definition 2.5.1 *G operiert total unzusammenhängend auf X (abkürzt TUH), falls für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung V von x existiert, so dass*

$$g(V) \cap V \neq \emptyset \text{ für nur endlich viele } g \in G \text{ gilt.} \tag{2.2.1}$$

Lemma 2.5.2 *G operiert total unzusammenhängend auf X genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*
(1) *für jedes $x \in X$ besitzt der Orbit $G(x)$ keinen Häufungspunkt[3] in X;*
(2) *für jedes $x \in X$ ist der Stabilisator $G_x := \{g \in G \,|\, g(x) = x\}$ endlich.*

Beweis. $\boxed{(1)\,\&(2) \Rightarrow \text{(TUH):}}$

Sei $x \in X$. Aus (1) folgt: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\mathcal{O}_\epsilon(x) \cap G(x) = \{x\}.$$

Wir behaupten, dass $V := \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(x)$ die Bedingung (2.2.1) erfüllt. In der Tat, für $g \in G$ mit

$$g\big(\mathcal{O}_{\epsilon/2}(x)\big) \cap \mathcal{O}_{\epsilon/2}(x) \neq \emptyset \tag{2.2.2}$$

gilt $\mathrm{dist}(x, g(x)) < \epsilon$ und somit gilt

$$g(x) \in \mathcal{O}_\epsilon(x) \cap G(x) = \{x\}.$$

Deswegen gilt $g \in G_x$. Nach (2) ist G_x endlich. So existieren nur endlich viele g, die (2.2.2) erfüllen und wir haben (TUH) bewiesen.

$\boxed{\neg(2) \Rightarrow \neg(\text{TUH})}$ ist offensichtlich.

$\boxed{\neg(1) \Rightarrow \neg(\text{TUH}):}$

Aus $\neg(1)$ folgt: Es existiert $x \in X$, so dass $G(x)$ einen Häufungspunkt y hat. Dann existieren verschiedene $g_i \in G$, $i \in \mathbb{N}$, mit $g_i(x) \in \mathcal{O}_{1/i}(y) \setminus \{y\}$. Insbesondere gilt

$$g_i^{-1}\big(\mathcal{O}_{1/i}(y)\big) \cap g_j^{-1}\big(\mathcal{O}_{1/j}(y)\big) \neq \emptyset$$

für alle i, j. Für $j \geqslant i$ gilt

$$g_j g_i^{-1}\big(\mathcal{O}_{1/i}(y)\big) \cap \mathcal{O}_{1/i}(y) \neq \emptyset.$$

Sei $\epsilon > 0$. Wir nehmen $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $1/i_0 < \epsilon$. Dann gilt

$$g_j g_{i_0}^{-1}\big(\mathcal{O}_\epsilon(y)\big) \cap \mathcal{O}_\epsilon(y) \neq \emptyset.$$

für alle $j \geqslant i_0$. Daraus folgt $\neg$(TUH). $\square$

[3] Sei X ein topologischer Raum und sei $S \subseteq X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $y \in X$ heißt *Häufungspunkt* der Menge S, falls jede Umgebung V von y einen Punkt aus $S \setminus \{y\}$ besitzt.

Lemma 2.5.3 Sei $z_0 \in \mathbb{H}$ und sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{H}$. Dann ist die Menge

$$M := \{T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \,|\, T(z_0) \in K\}$$

kompakt.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass M (als Teilmenge von $\mathbb{R}^4$) abgeschlossen und beschränkt ist. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) &\to \mathbb{H}, \\ T &\mapsto T(z_0). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$M = \{T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \,|\, \psi(T) \in K\} = \psi^{-1}(K).$$

Da ψ stetig ist und K abgeschlossen ist, ist auch M abgeschlossen.

Jetzt beweisen wir, dass M beschränkt ist:

a) Da K beschränkt ist, existiert eine Konstante $C_1 > 0$, so dass $|z| < C_1$ für alle $z \in K$ gilt. Dann gilt

$$\Big|\frac{az_0 + b}{cz_0 + d}\Big| < C_1 \tag{2.2.3}$$

für alle $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aus M.

b) Da K beschränkt ist, existiert eine Konstante C_2, so dass

$$\mathrm{Im}\Big(\frac{az_0 + b}{cz_0 + d}\Big) \geqslant C_2$$

ist. Nach (1.2.2) gilt

$$\frac{\mathrm{Im}(z_0)}{|cz_0 + d|^2} \geqslant C_2.$$

Daraus folgt

$$|cz_0 + d| \leqslant \sqrt{\frac{\mathrm{Im}(z_0)}{C_2}}. \tag{2.2.4}$$

Daraus und aus (2.2.3) folgt

$$|az_0 + b| \leqslant C_1\sqrt{\frac{\mathrm{Im}(z_0)}{C_2}}. \tag{2.2.5}$$

Aus (2.2.4) und (2.2.5) folgt, dass a, b, c, d beschränkt sind. $\square$

Satz 2.5.4 Eine Untergruppe G von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ist Fuchssch genau dann, wenn sie total unzusammenhängend auf $\mathbb{H}$ operiert.

Beweis. Angesichts des kanonischen Epimorphismus $\psi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ gilt:

- G ist diskret in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ genau dann, wenn $\psi^{-1}(G)$ diskret in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist.
- G operiert total unzusammenhängend auf $\mathbb{H}$ genau dann, wenn $\psi^{-1}(G)$ total unzusammenhängend auf $\mathbb{H}$ operiert.

Deswegen genügt es, die folgende Behauptung zu beweisen:
Eine Untergruppe G von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist diskret genau dann, wenn sie total unzusammenhängend auf $\mathbb{H}$ operiert.

1) Sei G diskret in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Angenommen, dass (2.2.1) nicht gilt. Dann existiert $z_0 \in \mathbb{H}$ und eine ϵ-Umgebung $V := \mathcal{O}_\varepsilon(z_0)$, so dass für

$$G_0 := \{g \in G \,|\, g(V) \cap V \neq \emptyset\}$$

$|G_0| = \infty$ gilt. Wir setzen $K := \overline{\mathcal{O}_{2\epsilon}(z_0)}$. Dann gilt $g(z_0) \in K$ für alle $g \in G_0$. Deswegen gilt

$$G_0 \subseteq \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \,|\, g(z_0) \in K\} \cap G.$$

- Die Menge $\{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \,|\, g(z_0) \in K\}$ ist kompakt (siehe Lemma 2.5.3).
- Da G diskret in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist, ist G abgeschlossen (siehe Lemma 2.3.4).
- Der Schnitt einer kompakten Menge und einer diskreten und abgschlossenen Menge ist endlich (siehe Lemma 2.2.13).

Also ist G_0 endlich. Ein Widerspruch.

2) Sei G nicht diskret in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Dann existiert eine unendliche Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von verschiedenen und nichttrivialen Elementen aus G, so dass $g_k \to e$ ist. Jedes Element aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ fixiert maximal einen Punkt in $\mathbb{H}$. Sei $z_0 \in \mathbb{H}$ ein Punkt, der von keinem g_k fixiert ist. Dann gilt:

- $g_k(z_0) \neq z_0$ für alle k,
- $g_k(z_0) \to z_0$.

Dann ist z_0 ein Häufungspunkt von $G(z_0)$. Nach Lemma 2.5.2 operiert G nicht total unzusammenhängend auf $\mathbb{H}$. $\square$

Folgerung 2.5.5 *(Kriterium für Fuchssche Gruppen)* Eine Untergruppe $G \leqslant \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ist Fuchssch genau dann, wenn für jeden Punkt $z \in \mathbb{H}$ sein Orbit $G(z)$ keinen Häufungspunkt in $\mathbb{H}$ hat.

Beweis. ($\Rightarrow$) folgt aus dem Satz 2.5.4 und dem Lemma 2.5.2.
($\Leftarrow$) Nehmen wir an, dass G nicht diskret ist. Wie im Beweis des Satzes 2.5.4 kann man eine Folge $(g_k(z_0))_{k\in\mathbb{N}}$ konstruieren, für die gilt:

- $g_k(z_0) \neq z_0$ für alle k,
- $g_k(z_0) \to z_0$.

Dann hat der Orbit $G(z_0)$ einen Häufungspunkt. $\square$

Definition 2.5.6 Sei $G \leqslant \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine Fuchssche Gruppe. Die Menge aller Häufungspunkte aller Orbits $G(z)$, $z \in \mathbb{H}$, heißt *Limesmenge* der Gruppe G und wird mit $\Lambda(G)$ bezeichnet. Kurz:

$$\Lambda(G) = \bigcup_{z \in \mathbb{H}} \mathrm{HP}(G(z)).$$

Lemma 2.5.7 Sei G eine Fuchssche Gruppe. Dann gelten:

(1) $\Lambda(G) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

(2) $G(\Lambda(G)) = \Lambda(G)$.

Beweis. (1) folgt aus Folgerung 2.5.5, (2) aus der Definition. □

Beispiele.

1) Für $G = \langle A \rangle$ mit $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ gilt $\Lambda(G) = \{0, \infty\}$.

2) Für $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ gilt $\Lambda(G) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Das ist eine schwere Aufgabe.

Folgerung 2.5.8 Für jede Fuchssche Gruppe G hat die Menge der Fixpunkte ihrer elliptischen Elemente keinen Häufungspunkt in $\mathbb{H}$. Mit anderen Worten hat die Menge

$$\{z \in \mathbb{H} \mid g(z) = z \text{ für einen nichttrivialen } g \in G\}$$

keinen Häufungspunkt in $\mathbb{H}$.

Beweis. Der Beweis folgt leicht aus Satz 2.5.4 und Definition 2.5.1. □

2.6 Algebraische Eigenschaften der Fuchsschen Gruppen

Sei G eine Gruppe und sei $g \in G$. Der Zentralisator von g in G ist die Untergruppe

$$C_G(g) := \{h \in G \mid hg = gh\}$$

Lemma 2.6.1 Seien T, S zwei nichttrivialen Elemente in $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$. Ist $TS = ST$, dann ist $S\Big(\widehat{\mathrm{Fix}}(T)\Big) = \widehat{\mathrm{Fix}}(T)$.

Satz 2.6.2 Seien T, S zwei nichttrivialen Elemente in $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$. Dann glilt

$$TS = ST \Leftrightarrow \widehat{\mathrm{Fix}}(T) = \widehat{\mathrm{Fix}}(S).$$

Folgerung 2.6.3 Zentralisator in $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$ eines hyperbolischen, parabolischen, elliptischen Elements besteht aus **id** und allen hyperbolischen, parabolischen, elliptischen Elementen (entsprechend), die gleiche Fixpuktmenge haben.

Folgerung 2.6.4 Zwei hyperbolische Elemente kommutieren genau dann, wenn sie die gleiche Achse haben.

Satz 2.6.5 Sei G eine Fuchssche Gruppe. Wenn alle nichttrivialen Elemente von G gleiche Fixpunkte haben, dann ist G zyklisch.

Satz 2.6.6 Jede abelsche Fuchssche Gruppe ist zyklisch.

Folgerung 2.6.7 Keine Fuchssche Gruppe ist der Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ isomorph.

Definition 2.6.8 Sei G eine Gruppe und sei $H \leqslant G$ ihre Untergruppe. Der Normalisator von H in G ist die Untergruppe

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Satz 2.6.9 Sei G eine Fuchssche Gruppe. Ist G nicht abelsch, dann ist $N_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}(G)$ auch Fuchssch.

2.7 Elementare Fuchssche Gruppen

Definition 2.7.1 Eine Untergruppe $G \leqslant \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ heißt *elementar*, wenn ein endlicher G-Orbit in $\widehat{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ existiert.

Bemerkung 2.7.2 $\mathbb{H}$ und $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sind $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$-invariant. Deswegen liegt der G-Orbit eines Punktes $z \in \widehat{\mathbb{H}}$ entweder in $\mathbb{H}$ oder in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Satz 2.7.3 Sei G eine Untergruppe in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, so dass alle nichttrivialen Elemente von G elliptisch sind. Dann haben alle Elemente von G einen gemeinsamen Fixpunkt in $\widehat{\mathbb{H}}$. Insbesondere G ist abelsch und elementar.

Beweis. Sei A ein Element in $G \setminus \{e\}$. Nach einer passenden Konjugation gilt

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ein beliebiges Element $B \in G$ hat die Form

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $\det(B) = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) &= 2ad\cos^2(\theta) + (a^2+b^2+c^2+d^2)\sin^2(\theta) - 2bc\cos^2(\theta) \\ &= 2\cos^2(\theta) + (a^2+b^2+c^2+d^2)\sin^2(\theta) \\ &= 2 + (a^2+b^2+c^2+d^2-2)\sin^2(\theta) \\ &= 2 + ((a-d)^2 + (b+c)^2)\sin^2(\theta) \geqslant 2. \end{aligned}$$

Deswegen ist der Kommutator $[A, B]$ nicht elliptisch. Also ist $[A, B] = 1$. Wir haben somit gezeigt, dass die Fuchssche Gruppe G abelsch ist. Nach Satz 2.6.2 haben alle Elemente von G einen gemeinsamen Fixpunkt in $\widehat{\mathbb{H}}$. $\square$

Folgerung 2.7.4 Jede Fuchssche Gruppe, deren nichttriviale Elemente elliptisch sind, ist eine endliche zyklische Gruppe.

Beweis. Der Beweis folgt aus den Sätze 2.6.6 und 2.7.3. $\square$

Satz 2.7.5 Jede elementare Fuchssche Gruppe G ist entweder zyklisch, oder es existiert eine reelle Zahl $k > 1$, so dass G und $H_k := \langle \theta_k, \psi \rangle$ konjugiert sind. Hier ist

$$\theta_k : z \mapsto kz, \qquad \psi : z \mapsto -\frac{1}{z}.$$

Beweis. Sei $\mathcal{O}$ ein endlicher Orbit von G in $\widehat{\mathbb{H}}$.
Fall 1. Sei $|\mathcal{O}| = 1$.
Dann ist $\mathcal{O} = \{\alpha\}$ für ein $\alpha \in \widehat{\mathrm{Fix}}(G)$.

Fall 1.1. Sei $\alpha \in \mathbb{H}$.

Dann sind alle Elemente von $G \setminus \{e\}$ elliptisch. Nach Folgerung 2.7.4 ist G eine endliche zyklische Gruppe.

Fall 1.2. Sei $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Dann besitzt G kein elliptisches Element. Dann sind drei Fälle zu betrachten:

(a) G enthält ein hyperbolisches Element und ein parabolisches Element.
Nach einer passenden Konjugation wird G das Element $g : z \mapsto \lambda z$ mit $\lambda > 0$ enthalten. Wir haben $\alpha \in \widehat{\mathrm{Fix}}(G) \subseteq \widehat{\mathrm{Fix}}(g) = \{0, \infty\}$. Deswegen gilt $\alpha = 0$ oder $\alpha = \infty$.
Falls $\alpha = 0$ ist, betrachten wir $\psi G \psi^{-1}$ statt G (zu Erinnerung: $\psi : z \to -\frac{1}{z}$). Wir haben:
- $\widehat{\mathrm{Fix}}(\psi G \psi^{-1}) = \psi\big(\widehat{\mathrm{Fix}}(G)\big) = \psi(\alpha) = \{\infty\}$.
- $g = \psi g^{-1} \psi^{-1} \in \psi G \psi^{-1}$.

Deswegen können wir o.B.d.A annehmen, dass $\alpha = \infty$ ist. Wenn es nötig ist, können wir g nach g^{-1} ersetzen und o.B.d.A annehmen, dass $\lambda > 1$ ist. Sei h ein parabolisches Element aus G. Wegen $\alpha \in \widehat{\mathrm{Fix}}(G) \subseteq \widehat{\mathrm{Fix}}(h)$ gilt $\{\infty\} = \widehat{\mathrm{Fix}}(h)$. Dann ist $h : z \to z + b$ für ein $b \in \mathbb{R}$. Wir haben

$$g^{-n} h g^n(z) = z + \lambda^{-n} b.$$

Da $\lambda > 0$ ist, ist

$$g^{-n} h g^n \to \mathrm{id},$$

was der Diskretheit von G widerspricht.

(b) $G \setminus \{e\}$ enthält nur parabolische Elemente.
Dann haben sie nur α als einen Fixpunkt. Aus dem Satz 2.6.5 folgt $G \cong \mathbb{Z}$.

(c) $G \setminus \{e\}$ enthält nur hyperbolische Elemente.
Wie oben, o.B.d.A. können wir annehmen, dass $g : z \mapsto \lambda z$ ($\lambda \neq 1$) in G liegt und $\alpha = \infty$ ist. Wenn $\langle g \rangle = G$ ist, dann sind wir fertig.
Wenn $\langle g \rangle \neq G$ ist, dann betrachten wir ein $h \in G \setminus \langle g \rangle$. Wegen $\alpha \in \widehat{\mathrm{Fix}}(h)$ gilt $h : z \mapsto az + b$ mit $a \neq 0$. Wir haben $ghg^{-1}h^{-1} : z \mapsto z + (\lambda - 1)b$. Wenn $b \neq 0$ ist, dann ist dieses Element parabolisch, was der Annahme widersprcht. Wenn $b = 0$ ist, dann gilt $h : z \mapsto az$. Also haben alle Elemente von G die Form $z \mapsto kz$. Dann ist G, bis zur Isomorphie, eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{R}_+^*$. Dann ist $G \cong \mathbb{Z}$.

Fall 2. Sei $|\mathcal{O}| = 2$, also sei $\mathcal{O} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Fall 2.1. $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{H}$.

Dann enthält G nur elliptische Elemente. Nach Folgerung 2.7.4 ist G eine endliche zyklische Gruppe.

Fall 2.2. $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Dann besitzt G kein parabolisches Element. (In der Tat: Jedes parabolische Element hat nur einen endlichen Orbit in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dieser Orbit besteht aus einem Fixpunkt.) Wir betrachten drei Fälle:

(a) $G \setminus \{e\}$ besitzt nur hyperbolische Elemente. Dann sind α_1 und α_2 ihre gemeinsamen Fixpunkte und $\{\alpha_1\}$ ist ein Orbit für G. Ein Widerspruch.

(b) $G \setminus \{e\}$ besitzt nur elliptische Elemente. Nach Folgerung 2.7.4 ist G eine endliche zyklische Gruppe.

(c) $G \setminus \{e\}$ besitzt sowohl elliptische als auch hyperbolische Elemente. Dann haben elliptische Elemente die Ordnung 2 und permutieren α_1, α_2. Nach einer Konjugation können wir annehmen, dass $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = \infty$ ist. Dann haben alle hyperbolischen Elemente in G die Gestalt

$$g_k : z \mapsto kz \;\; k > 0, k \neq 1.$$

und alle elliptischen Elemente in G die Gestalt

$$e_\lambda : z \mapsto -\frac{\lambda}{z}, \;\; \lambda > 0.$$

Sei G_0 die Untergruppe von G, die aus id und allen hyperbolischen Elementen von G besteht. Dann hat G_0 den Index 2 in G. Die zweite Nebenklasse besteht aus elliptischen Elementen. Sei e_λ eines von diesen. Wir konjugieren G noch einmal mit

$$q : z \mapsto \sqrt{\lambda} z.$$

Dann gelten $qG_0q^{-1} = G_0$ und $qe_\lambda q^{-1} = e_1 = \psi$. Deswegen gilt für die neue G:

$$G = G_0 \cup \psi G_0.$$

Da G_0 diskret ist, ist $G_0 = \langle g_k \rangle$ für ein $k > 0$, $k \neq 1$. Somit ist $G = H_k$.

Fall 3. Sei $|\mathcal{O}| \geqslant 3$.

Dann ist $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $G \setminus \{e\}$ besitzt nur elliptische Elemente. Nach Folgerung 2.7.4 ist G eine endliche zyklische Gruppe. □

2.8 Ungleichung von Jorgensen

Lemma 2.8.1 Seien $S, T \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Wir setzen $S_0 := S$, $S_1 := S_0 T S_0^{-1}$ und $S_{r+1} = S_r T S_r^{-1}$ für $r \geqslant 1$. Wenn ein $n \geqslant 1$ mit $S_n = T$ existiert, dann ist $\langle S, T\rangle$ elementar und $S_2 = T$.

Beweis. Für $T = \mathrm{Id}$ ist die Behauptung offensichtlich. Sei $T \neq \mathrm{Id}$.

Fall 1. Sei $|\widehat{\mathrm{Fix}}(T)| = 1$.

Dann ist $\widehat{\mathrm{Fix}}(T) = \{\alpha\}$ für ein $\alpha \in \widehat{\mathbb{H}}$. Da $S_{r+1} \sim T$ ist, gilt auch $|\widehat{\mathrm{Fix}}(S_{r+1})| = 1$ für alle $r \geqslant 0$. Außerdem gilt

$$S_{r+1} \circ S_r(\alpha) = S_r \circ T \circ S_r^{-1} \circ S_r(\alpha) = S_r(\alpha).$$

Daraus folgt $\widehat{\mathrm{Fix}}(S_{r+1}) = \{S_r(\alpha)\}$. Deshalb gilt:

Ist $\alpha \in \widehat{\mathrm{Fix}}(S_{r+1})$, dann ist auch $\alpha \in \widehat{\mathrm{Fix}}(S_r)$.

Da $S_n = T$ ist, gilt $\widehat{\mathrm{Fix}}(S_n) = \{\alpha\}$. Daraus folgt $\alpha \in \widehat{\mathrm{Fix}}(S_0)$. Also gilt:

- $\alpha \in \widehat{\mathrm{Fix}}\langle S, T\rangle$. Deswegen ist $\langle S, T\rangle$ elementar.
- $\widehat{\mathrm{Fix}}(S_1) = \{\alpha\} = \widehat{\mathrm{Fix}}(T)$. Daraus folgt $S_1 T = T S_1$. Deswegen gilt $S_2 = T$.

Fall 2. Sei $|\widehat{\mathrm{Fix}}(T)| = 2$.

Dann ist $\widehat{\mathrm{Fix}}(T) = \{\alpha, \beta\}$ für einige $\alpha, \beta \in \widehat{\mathbb{H}}$. Da $S_{r+1} \sim T$ ist, gilt $|\widehat{\mathrm{Fix}}(S_{r+1})| = 2$ und S_{r+1} ist hyperbolisch für alle $r \geqslant 0$. Außerdem gilt:

$$S_{r+1} \circ S_r(\{\alpha, \beta\}) = S_r \circ T \circ S_r^{-1} \circ S_r(\{\alpha, \beta\}) = S_r(\{\alpha, \beta\}).$$

Wie jedes hyperbolische Element besitzt S_{r+1} eine einzige 2-elementige invariante Menge in $\widehat{\mathbb{H}}$; sie besteht aus zwei Fixpunkten von S_{r+1}. Deshalb gilt für $r \geqslant 0$:

Ist $\{\alpha, \beta\}$ S_{r+1}-invariant, dann ist $\{\alpha, \beta\}$ S_r-invariant.

Da $S_n = T$ ist, ist $\{\alpha, \beta\}$ S_n-invariant. Daraus folgt, dass $\{\alpha, \beta\}$ S_0-invariant ist. Also gilt:

- $\{\alpha, \beta\}$ ist eine $\langle S, T\rangle$-invariante Menge. Deswegen ist $\langle S, T\rangle$ elementar.
- Da S_1 und T zwei hyperbolische Elemente mit gleichen Fixpunktmengen sind, gilt $S_1 T = T S_1$. Deswegen gilt $S_2 = T$.

Satz 2.8.2 (Jorgensen-Ungleichung) Seien $T, S \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, so dass $\langle T, S\rangle$ eine nicht elementare Fuchssche Gruppe ist. Dann gilt:

$$|\mathrm{Tr}^2(T) - 4| + |\mathrm{Tr}(TST^{-1}S^{-1}) - 2| \geqslant 1. \tag{2.8.1}$$

Beweis. Wir definieren $S_0, S_1, \dots$ wie im Lemma 2.8.1. Wir werden zeigen: Wenn die Jorgensen-Ungleichung nicht erfüllt ist, dann wird

$$S_n = T \tag{2.8.2}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 2.8.1 wird dann die Gruppe $\langle S, T\rangle$ elementar und wir erhalten einen Widerspruch.

Fall 1. Sei T parabolisch.

Da die Spur bezüglich der Konjugation invariant ist, können wir folgendes annehmen:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Angenommen, dass die Ungleichung (2.8.1) nicht stimmt. Dann ist $|c| < 1$ (siehe Aufgabe 4 im Übungsblatt 5). Sei

$$S_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}.$$

Aus $S_{n+1} = S_n \circ T \circ S_n^{-1}$ folgt

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_n & -b_n \\ -c_n & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a_n c_n & a_n^2 \\ -c_n^2 & 1 + a_n c_n \end{bmatrix}$$

Nach Induktion erhalten wir $c_{n+1} = -c^{2n}$. Da $|c| < 1$ ist, ist

$$c_n \to 0.$$

Dann haben wir $|a_n| \leqslant 1 + |a_{n-1}| \leqslant \cdots \leqslant n + |a|$. Deswegen gilt $|a_n c_n| \leqslant (n + |a|)|c|^{2n} \to 0$. Daraus folgt

$$a_{n+1} = 1 - a_n c_n \to 1.$$

Also gilt $S_{n+1} \to T$. Da $\langle S, T\rangle$ diskret ist, wird die Gleichung (2.8.2) für groß genug n erfüllen.

Fall 2. Sei T hyperbolisch.

Nach einer passenden Konjugation können wir annehmen:

$$T = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 1/u \end{bmatrix} \ (u > 1), \quad S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Wir bezeichnen

$$\mu := |\mathrm{Tr}^2(T) - 4| + |\mathrm{Tr}(TST^{-1}S^{-1}) - 2|$$

Angenommen, dass die Ungleichung (2.8.1) nicht stimmt. Dann gilt

$$\mu = (1 + |bc|)\Big|u - \frac{1}{u}\Big|^2 < 1. \tag{2.8.3}$$

Aus $S_{n+1} = S_n \circ T \circ S_n^{-1}$ folgt

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n d_n u - \dfrac{b_n c_n}{u} & a_n b_n\Big(\dfrac{1}{u} - u\Big) \\ c_n d_n\Big(u - \dfrac{1}{u}\Big) & \dfrac{a_n d_n}{u} - b_n c_n u \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt $b_{n+1}c_{n+1} = -b_n c_n(1 + b_n c_n)\Big(u - \dfrac{1}{u}\Big)^2.$ (2.8.4)

Behauptung. Es gilt $|b_n c_n| \leqslant \mu^n |bc|$.

Beweis. Wir bezeichnen $x_n = b_n c_n$ und $q = \Big|u - \dfrac{1}{u}\Big|^2$. Aus (2.8.3) und (2.8.4) folgt $\mu = (1 + |x_0|)q < 1$ und $|x_{n+1}| \leqslant |x_n|(1 + |x_n|)q$. Wir müssen beweisen, dass $|x_n| \leqslant \mu^n |x_0|$ gilt. Für $n = 0$ gilt das. Induktionsschritt $n \to n + 1$:

$$|x_{n+1}| \leqslant |x_n| \cdot (1 + |x_n|)q \leqslant \mu^n |x_0| \cdot (1 + \mu^n |x_0|)q \leqslant \mu^n |x_0| \cdot (1 + |x_0|)q = \mu^{n+1}|x_0|.$$

□

Aus dieser Behauptung und aus $\mu < 1$ folgt:

- $b_{n+1}c_{n+1} \to 0$,
- $a_n d_n = 1 + b_n c_n \to 1$,
- $a_{n+1} \to u$ und $d_{n+1} \to \dfrac{1}{u}$.

Aus

$$\Big|\frac{b_{n+1}}{b_n}\Big| = \Big|a_n\Big(\frac{1}{u} - u\Big)\Big| \to \Big|u\Big(\frac{1}{u} - u\Big)\Big| < \mu^{\frac{1}{2}}|u|$$

folgt

$$\Big|\frac{b_{n+1}}{u^{n+1}}\Big| < \mu^{\frac{1}{2}} \cdot \Big|\frac{b_n}{u^n}\Big|$$

für groß genug n. Daraus folgt

- $\dfrac{b_n}{u^n} \to 0$,
- $c_n u^n \to 0$ (analog).

Es gilt

$$T^{-n}S_{2n}T^n = \begin{bmatrix} a_{2n} & \dfrac{b_{2n}}{u^{2n}} \\ c_{2n}u^{2n} & d_{2n} \end{bmatrix} \to T.$$

Da $\langle S, T\rangle$ diskret ist, ist $T^{-n}S_{2n}T^n = T$ für alle groß genug n. Daraus folgt $S_{2n} = T$ für alle groß genug n, also die Formel (2.8.2) ist erfüllt.

Fall 3. T ist elliptisch.

Nach einer passenden Konjugation in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ können wir annehmen:

$$T = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 1/u \end{bmatrix} \quad (u = e^{i\varphi}, 0 < \varphi < \pi).$$

Der weitere Beweis läuft wie im Fall 2. □

Lemma 2.8.3 Jede nicht elementare Untergruppe $G \leqslant \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ enthält unendlich viele hyperbolische Elemente, dessen Fixpunktmengen disjunkt sind.

Beweis.
Fall 1. G enthält ein parabolisches Element f. Nach einer passenden Konjugation können wir annehmen, dass $f(z) = z + 1$ ist. Dann ist $\widehat{\mathrm{Fix}}(f) = \{\infty\}$. Sei $g \in G$ ein beliebiges Element, $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Dann ist

$$f^n \circ g(z) = \frac{(a+nc)z + (b+nd)}{cz+d}.$$

Folglich ist

$$\mathrm{Tr}(f^n \circ g) = a + d + nc.$$

Da G nicht elementar ist, existiert ein $g \in G$ mit $\infty \notin \mathrm{Fix}(g)$. Dann ist $c \neq 0$ und es existiert ein n_0, so dass $|\mathrm{Tr}(f^n \circ g)| > 2$ für alle $n \geqslant n_0$ ist. Dann sind $f^n \circ g$ hyperbolisch für alle $n \geqslant n_0$. Angenommen, dass für einige $n_2 > n_1 \geqslant n_0$ gilt:

$$\widehat{\mathrm{Fix}}(f^{n_1} \circ g) \cap \widehat{\mathrm{Fix}}(f^{n_2} \circ g) \neq \emptyset.$$

Daraus und aus $\widehat{\mathrm{Fix}}(f) = \{\infty\}$ folgt $\infty \in \widehat{\mathrm{Fix}}(g)$. Ein Widerspruch.
Fall 2. G enthält kein parabolisches Element.
Wenn $G \setminus \{1\}$ nur elliptische Elemente enthält, dann ist G elementar (siehe Satz 2.7.3), was unmöglich ist. Deswegen enthält G mindestens ein hyperbolisches Element. Sei H die Menge aller hyperbolischen Elemente in G. Wir betrachten die Menge $M = \bigcup\limits_{h \in H} \widehat{\mathrm{Fix}}(h)$. Für jedes $g \in G$ und jedes $h \in H$ ist ghg^{-1} hyperbolisch und es gilt $\widehat{\mathrm{Fix}}(ghg^{-1}) = g\widehat{\mathrm{Fix}}(h)$. Deswegen gilt $gM = M$. Da G nicht elementar ist, ist M unendlich.
Seien h_1, h_2 zwei hyperbolische Elemente aus G. Wäre

$$|\widehat{\mathrm{Fix}}(h_1) \cap \widehat{\mathrm{Fix}}(h_2)| = 1,$$

dann wäre $[h_1, h_2]$ parabololisch (siehe Aufgabe 3 aus dem Übungsblatt 4), ein Widerspruch. Deswegen gilt

$$|\widehat{\mathrm{Fix}}(h_1) \cap \widehat{\mathrm{Fix}}(h_2)| \in \{0, 2\}.$$

Dann folgt die Aussage aus der Unendlichkeit der Menge M. □

Folgendes Lemma ist leicht zu beweisen und wird als Aufgabe vorgeschlagen.

Lemma 2.8.4 (1) Wenn $T \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ die Ordnung 2 hat, dann ist $\mathrm{Tr}(T) = 0$.

(2) Elliptische Elemente in elementaren unendlichen diskreten Gruppen haben die Ordnung 2.

Satz 2.8.5 Sei G eine nicht elementare Untergruppe von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Die Gruppe G ist diskret genau dann, wenn für je zwei Elemente $S, T \in G$ die Untergruppe $\langle S, T\rangle$ diskret ist.

Beweis. Jede Untergruppe einer diskreten Gruppe ist diskret. Deswegen müssen wir nur eine Richtung betrachten. Angenommen, dass für je zwei Elemente $S, T \in G$ die Gruppe $\langle S, T\rangle$ diskret ist, aber G selbst nicht diskret ist. Dann existiert eine Folge von verschiedenen nichttrivialen Elementen $T_1, T_2, \dots$, die gegen Id konvergiert. Dann konvergieren ihre Spuren gegen 2. Nach Lemma 2.8.4 können wir o.B.d.A. annehmen:

$$|\mathrm{Ord}(T_n)| \neq 2 \tag{2.8.5}$$

Aus $T_n \to \mathrm{Id}$ folgt:

$$|\mathrm{Tr}^2(T_n) - 4| + |\mathrm{Tr}(T_n S T_n^{-1} S^{-1}) - 2| \to 0.$$

Nach Jorgensen ist dann $\langle S, T_n\rangle$ elementar für alle groß genug n. Nach Lemma 2.8.3 enthält G drei hyperbolische Elemente S_1, S_2, S_3 mit

$$\widehat{\mathrm{Fix}}(S_i) \cap \widehat{\mathrm{Fix}}(S_j) = \emptyset \tag{2.8.6}$$

für $i \neq j$. Sei n eine natürliche Zahl, so dass die Gruppen $G_i := \langle S_i, T_n\rangle$ elementar sind. Dann existieren nichtleere endliche G_i-invariante Teilmengen $M_i \subseteq \widehat{\mathbb{H}}$ für $i = 1, 2, 3$. Da S_i hyperbolisch ist, ist $M_i \subseteq \widehat{\mathrm{Fix}}(S_i)$. Nach (2.8.6) sind M_1, M_2, M_3 disjunkt. Die endliche Menge $M := M_1 \cup M_2 \cup M_3$ ist T_n-invariant und es gilt $|M| \geqslant 3$. So ist T_n elliptisch und liegt in G_1. Elliptische Elemente in elementaren unendlichen diskreten Gruppen haben die Ordnung 2 (siehe Lemma 2.8.4). Ein Widerspruch zur Annahme (2.8.5). □

3 Fundamentalbereich

3.1 Definition und einige Eigenschaften

Definition 3.1.1 Sei X ein metrischer Raum und sei $G \leqslant \mathrm{Isom}(X)$. Eine Teilmenge $F \subseteq X$ heißt *Fundamentalbereich* für G, falls folgende Bedingungen gelten:

(1) $F = \overline{\mathrm{int}(F)}$.

(2) $\bigcup\limits_{T \in G} T(F) = X$.

(3) $\mathrm{int}(F) \cap T(\mathrm{int}(F)) = \emptyset$ für alle $T \in G \setminus \{1\}$.

Die Familie $\{T(F) \,|\, T \in G\}$ heißt *Überdeckung* von X.
Die Menge $\partial F := F \setminus \mathrm{int}(F)$ heißt *Grenze* von F.

Bemerkung.

1) Eine Gruppe kann verschiedene Fundamentalbereiche haben.
2) Wir werden zeigen, dass Fuchssche Gruppen zusammenhängende konvexe Fundamentalbereiche in $\mathbb{H}$ haben.

Satz 3.1.2 Sei $G \leqslant \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ und seien F_1 und F_2 zwei Fundamentalbereiche für G. Angenommen[4] $\mu(F_1) < \infty$ und $\mu(\partial F_1) = \mu(\partial F_2) = 0$. Dann gilt $\mu(F_1) = \mu(F_2)$.

Beweis. Es gilt $F_1 \supseteq F_1 \cap \Big(\bigcup\limits_{T \in G} T(\mathrm{int} F_2)\Big) = \bigcup\limits_{T \in G} \Big(F_1 \cap T(\mathrm{int} F_2)\Big)$. Nach (3) ist diese Vereinigung disjunkt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mu(F_1) &\geqslant \sum_{T \in G} \mu\big(F_1 \cap T(\mathrm{int} F_2)\big) &&= \sum_{T \in G} \mu\big(T^{-1}(F_1) \cap \mathrm{int} F_2\big) \\ &= \sum_{T \in G} \mu\big(T(F_1) \cap \mathrm{int} F_2\big) &&\geqslant \mu\Big(\bigcup_{T \in G} \big(T(F_1) \cap \mathrm{int} F_2\big)\Big) \\ & &&\overset{(2)}{=} \mu(\mathrm{int} F_2) = \mu(F_2). \end{aligned}$$

Symmetrisch erhalten wir $\mu(F_2) \geqslant \mu(F_1)$. □

Bemerkung. Bei diesen Bedingungen hängt $\mu(F)$ nur von G ab, deshalb schreibt man $\mu(G)$ statt $\mu(F)$.

Lemma 3.1.3 Sei $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{H}$ eine offene Teilmenge und sei $F \subseteq \mathbb{H}$ ein Fundamentalbereich. Wenn $\mathcal{O} \cap F \neq \emptyset$ ist, dann ist $\mathcal{O} \cap \mathrm{int}\, F \neq \emptyset$.

Satz 3.1.4 Sei G eine diskrete Untergruppe von $\mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ und sei $H \leqslant G$. Sei F ein Fundamentalbereich für G und sei $G = HT_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup HT_n$. Dann gilt:

(a) $F_1 = T_1(F) \cup \cdots \cup T_n(F)$ ist ein Fundamentalbereich für H.

(b) Ist $\mu(F) < \infty$ und $\mu(\partial F) = 0$, dann ist $\mu(F_1) = n \cdot \mu(F)$.

[4]Hier ist μ der hyperbolische Flächeninhalt.

Beweis. (a) Wir überprüfen die drei Punkte der Definition 3.1.1.

(1) Zuerst zeigen wir, dass $F_1 = \overline{\mathrm{int}(F_1)}$ gilt. Wir haben

$$\begin{aligned} & \mathrm{int}\, F_1 \supseteq T_1(\mathrm{int}\, F) \cup \cdots \cup T_n(\mathrm{int}\, F) \\ \Rightarrow\ & \overline{\mathrm{int}\, F_1} \supseteq T_1(\overline{\mathrm{int}\, F}) \cup \cdots \cup T_n(\overline{\mathrm{int}\, F}) \quad = T_1(F) \cup \ldots T_n(F) = F_1. \end{aligned}$$

Da F abgeschlossen ist, ist F_1 auch, also gllt

$$F_1 = \overline{F}_1 \supseteq \overline{\mathrm{int}\, F_1} \supseteq F_1.$$

Daraus folgt $F_1 = \overline{\mathrm{int}\, F_1}$.

(2) $\bigcup\limits_{h \in H} h(F_1) = \bigcup\limits_{g \in G} g(F) = X$.

(3) Angenommen, dass

$$\mathrm{int}\, F_1 \cap S(\mathrm{int}\, F_1) \neq \emptyset$$

für ein $S \in H$ gilt. Dann ist $z = Sz'$ für einige $z, z' \in \mathrm{int}\, F_1$.
Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass die offenen Kugeln $B_\varepsilon(z)$ und $B_\varepsilon(z')$ in $\mathrm{int}\, F_1$ liegen.

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(z') \subseteq F_1 \implies\ & B_\varepsilon(z') \cap T_i(F) \neq \emptyset && \text{für ein } T_i \\ \implies\ & S(B_\varepsilon(z')) \cap ST_i(F) \neq \emptyset \\ \implies\ & B_\varepsilon(z) \cap ST_i(F) \neq \emptyset \\ \overset{3.1.3}{\implies}\ & B_\varepsilon(z) \cap ST_i(\mathrm{int}\, F) \neq \emptyset \\ \implies\ & F_1 \cap ST_i(\mathrm{int}\, F) \neq \emptyset \\ \implies\ & T_j(F) \cap ST_i(\mathrm{int}\, F) \neq \emptyset && \text{für ein } T_j \\ \overset{3.1.3}{\implies}\ & T_j(\mathrm{int}\, F) \cap ST_i(\mathrm{int}\, F) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Aus der Definition 3.1.1 folgt $T_j = ST_i$. Da $S \in H$ ist, folgt $T_i = T_j$ und $S = 1$.

(b) Nach Definition 3.1.1 (b) gilt

$$\mathrm{int}(T_i(F)) \cap \mathrm{int}(T_j(F)) = \emptyset$$

für $i \neq j$. Dann gilt

$$\mu(T_i(F) \cap T_j(F)) \leqslant \mu(\partial(T_i(F))) + \mu(\partial(T_j(F))) = 2\mu(\partial F) = 0.$$

Dann gilt[5]

$$\mu(F_1) = \mu\big(T_1(F) \cup \cdots \cup T_n(F)\big) = \mu(T_1(F)) + \cdots + \mu(T_n(F)) = n \cdot \mu(F).$$

□

[5] Wir benutzen die $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$-Invarianz von μ.

3.2 Dirichlet-Bereich

Definition 3.2.1 Sei $G \leqslant \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine Fuchssche Gruppe, sei $p \in \mathbb{H}$ ein Punkt, so dass $\mathrm{St}_G(p) = 1$ gilt. Der *Dirichlet-Bereich* von G im Punkt p ist

$$D_p(G) = \{z \in \mathbb{H} \mid \rho(z,p) \leqslant \rho(z,T(p)) \text{ für alle } T \in G\}.$$

Für $T \in G$ bezeichnen wir

$$H_p(T) = \{z \in \mathbb{H} \mid \rho(z,p) \leqslant \rho(z,T(p))\}$$

und

$$L_p(T) = \{z \in \mathbb{H} \mid \rho(z,p) = \rho(z,T(p))\}.$$

Dann gilt

$$D_p(G) = \bigcap_{T \in G \setminus \{1\}} H_p(T).$$

Lemma 3.2.2 Für den Dirichlet-Bereich $D_p(G)$ gelten:
(1) $D_p(G)$ enthält eine ε-Umgebung von p.
(2) $D_p(G)$ ist konvex, abgeschlossen, und es gilt $D_p(G) = \overline{\mathrm{int}(D_p(G))}$.

Proof. (1) Die Gruppe G ist diskret, deswegen ist der Orbit $G(p)$ diskret. Also existiert $\varepsilon > 0$ mit

$$B_\varepsilon(p) \cap G(p) = \{p\}.$$

Daraus und aus $\mathrm{St}_G(p) = 1$ folgt

$$B_\varepsilon(p) \cap T(p) = \{p\}$$

für alle $T \in G \setminus \{1\}$. Dann gilt

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p) \subseteq H_p(T).$$

(2) Die Konvexität und die Abgeschlossenheit von $D_p(G)$ ist offenbar. Sei $z \in D_p(G)$. Dann gilt

$$\bigcup_{z' \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p)} [z', z] \subseteq D_p(G),$$

woraus folgt $z \in \overline{\mathrm{int}(D_p(G))}$. □

Lemma 3.2.3 Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$. Wir betrachten die Equidistante

$$\mathrm{Equidist}(z_1, z_2) := \{z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, z_1) = \rho(z, z_2)\}.$$

Dann ist diese Mange eine eindeutige Geodäte, die durch die “hyperbolische Mitte” des hyperbolischen Segments $[z_1, z_2]$ senkrecht zu diesem Segment läuft.

Beweis. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $z_1 = i$ und $z_2 = ir^2$ für ein $r > 0$ gilt. Mit Hilfe des Satzes 1.3.8(2) gilt für $z \in \mathrm{Equidist}(z_1, z_2)$:

$$|z - i|^2 = \frac{|z - ir^2|^2}{r^2}.$$

Nach einer kurzen Berechnung bekommen wir $|z| = r$. □

Lemma 3.2.4 Ist $z \in \operatorname{int} D_p(G)$, dann ist für alle $T \in G \setminus \{1\}$

$$\rho(z,p) < \rho(z,T(p)).$$

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z) \subseteq D_p(G)$. Angenommen, dass für ein $T \in G \setminus \{1\}$ gilt:

$$\rho(z,p) \geqslant \rho(z,T(p)).$$

Es existiert ein $z' \in B_\varepsilon(z)$ mit $\rho(z',p) > \rho(z,p)$. Dann gilt

$$\rho(z',p) > \rho(z,T(p))$$

und so gilt $z' \notin H_p(T) \subseteq D_p(G)$. Ein Widerspuch mit $z' \in B_\varepsilon(z) \subseteq D_p(G)$. □

Man kann dieses Lemma folgendermaßen umformulieren

Lemma 3.2.5 Ist $z \in \operatorname{int} D_p(G)$, dann ist für alle $T \in G \setminus \{1\}$

$$\rho(z,p) < \rho(T(z),p).$$

Satz 3.2.6 Sei $G \leqslant \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine Fuchssche Gruppe, sei $p \in \mathbb{H}$ ein Punkt, so dass $\mathrm{St}_G(p) = 1$ gilt. Dann ist der *Dirichlet-Bereich* $D_p(G)$ ein konvexer und zusammenhängender Fundamentalbereich für G.

Beweis. Wir überpüfen die drei Bedingungen der Definition 3.2.1.

(1) $D_p(G) = \overline{\operatorname{int}(D_p(G))}$ ist schon bewiesen in Lemma 3.2.2.

(2) Wir zeigen $\bigcup_{T \in G} T(D_p(G)) = \mathbb{H}$.

Sei $z \in \mathbb{H}$ beliebig. Nach Folgerung 2.5.5 hat der Orbit $G(z)$ keinen Häufungspunkt in $\mathbb{H}$. Deswegen existiert $z_0 \in G(z)$ mit

$$\rho(p,z_0) = \min_{z' \in G(z)} \rho(p,z').$$

Dann gilt

$$\rho(p,z_0) \leqslant \rho(p,T(z_0))$$

für alle $T \in G$. Äquivalent ist

$$\rho(p,z_0) \leqslant \rho(T(p),z_0)$$

für alle $T \in G$. Daraus folgt $z_0 \in D_p(G)$. Da $z_0 \in G(z)$ ist, liegt jeder Punkt $z \in \mathbb{H}$ in dem G-orbit eines Punktes z_0 aus $D_p(G)$. Dann ist die Bedingung (2) erfüllt.

(3) Wir zeigen, dass für alle $T \in G \setminus \{1\}$ gilt

$$\operatorname{int}(D_p(G)) \cap T(\operatorname{int}(D_p(G))) = \emptyset.$$

Wenn das nicht stimmt, dann existieren $z, z' \in \operatorname{int}(D_p(G))$ mit $z' = Tz$ für ein $T \in G \setminus \{1\}$. Nach Lemma 3.2.5 gilt

$$\rho(z,p) < \rho(z',p) < \rho(z,p).$$

Ein Widerspruch.

Es ist klar, dass $D_p(G)$ konvex und so wegzusammenhängend ist. Dann ist $D_p(G)$ zusammenhängend. □

Satz 3.2.7 Sei $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ und sei $p = ki$ mit $k > 1$. Dann ist

$$D_p(G) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geqslant 1, |\mathrm{Re}(z)| \leqslant \frac{1}{2}\}.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit M die Menge in der rechten Seite dieser Gleichung. Mit Hilfe des Lemmas 3.2.3 ist es leicht zu überprüfen, dass $L_p(T)$, $L_p(T^{-1})$ und $L_p(S)$ die drei Seiten von M sind. Daraus folgt $D_p(G) \subseteq M$.

Angenommen $D_p(G) \neq M$. Aus der Abgeschlossenheit beiden Mengen folgt, dass ein

$$z \in \mathrm{int}(M) \setminus D_p(G)$$

existiert. Da $D_p(G)$ ein Fundamentalbereich für G ist, existiert ein $g \in G \setminus \{1\}$ mit $g(z) \in D_p(G)$. Nach eine kleine Variation von z können wir Folgendes annehmen:

$$g(z) \in \mathrm{int}(D_p(G)).$$

Also gelten

$$z \in \mathrm{int}(M) \text{ und } g(z) \in \mathrm{int}(M) \tag{3.2.1}$$

für ein $g \in G \setminus \{1\}$. Sei $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dann gilt

$$|cz+d|^2 = (cz+d)(c\overline{z}+d) = c^2|z|^2 + 2\mathrm{Re}(z)cd + d^2 > c^2 + d^2 - |cd| = (|c|-|d|)^2 + |cd| \in \mathbb{N},$$

sonst wäre $c = d = 0$, was unmöglich ist. Daraus folgt

$$\mathrm{Im}(g(z)) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} < \mathrm{Im}(z).$$

Nach Symmetrie folgt analog aus (3.2.1): $\mathrm{Im}(z) < \mathrm{Im}(g(z))$. Ein Widerspruch. Also gilt $D_p(G) = M$. □

3.3 Limesmenge $\Lambda(G)$

Wir erinneren uns an die Definition 2.5.6: Sei $G \leqslant \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine Fuchssche Gruppe. Die Menge aller Häufungspunkte aller Orbits $G(z)$, $z \in \mathbb{H}$, heißt *Limesmenge* der Gruppe G und wird mit $\Lambda(G)$ bezeichnet. Kurz:

$$\Lambda(G) = \bigcup_{z \in \mathbb{H}} \mathrm{HP}(G(z)).$$

Wir haben gemerkt, dass $\Lambda(G)$ ist G-invariant und es gilt:

$$\Lambda(G) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\} \tag{3.3.1}$$

Nach Aufgabe 1(a) aus dem Übungsblatt 4 gilt:

$$\overline{\Lambda(G)} = \Lambda(G).$$

Bei der Lösung dieser Aufgabe haben wir folgendes bewiesen: Für jeden Punkt $z_0 \in \mathbb{H}$ gilt

$$\Lambda(G) = \mathrm{HP}(G(z_0)). \tag{3.3.2}$$

Lemma 3.3.1 Sei G eine Fuchssche Gruppe und sei $\alpha \in \Lambda(G)$. Für je zwei verschiedene Punkte in $\beta, \gamma \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \setminus \{\alpha\}$ gilt

$$\alpha \in \mathrm{HP}(G(\beta)) \cup \mathrm{HP}(G(\gamma)).$$

Beweis. Sei $K_{\beta,\gamma}$ die offene Geodäte, die β und γ verbindet. Sei $z_0 \in K_{\beta,\gamma}$ ein beliebiger Punkt. Aus (3.3.2) folgt, dass es eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verschiedener Elemente von G mit $T_n(z_0) \to \alpha$ gibt. Dann existiert eine Teilfolge $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $T_{n_k}(\beta) \to \alpha$ oder $T_{n_k}(\gamma) \to \alpha$ ist. O.B.d.A. gilt $T_n(\beta) \to \alpha$.

Fall 1. Es gilt $T_n(\beta) \neq \alpha$ für alle n.
Dann ist $\alpha \in \mathrm{HP}(G(\beta))$.

Fall 2. Es gilt $T_n(\beta) = \alpha$ und $T_n(\beta) = \alpha$ für einige $n \neq m$.
Dann ist $g := T_n T_m^{-1}$ ein nichttriviales Element aus $\mathrm{St}_G(\alpha)$. Da $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist, ist g nicht elliptisch.

(a) Wenn g hyperbolisch ist, dann ist $\widehat{\mathrm{Fix}}(g) = \{\alpha, \alpha'\}$ für ein $\alpha' \neq \alpha$. Wenn es ein von zwei Elementen, β oder γ, sagen wir β, nicht in $\widehat{\mathrm{Fix}}(g)$ liegt, dann gilt $\alpha \in \mathrm{HP}(\langle g \rangle(\beta))$ wegen der bekannten Dynamik des hyperbolischen Elements.

(b) Wenn g parabolisch ist, dann ist $\widehat{\mathrm{Fix}}(g) = \{\alpha\}$, und der Beweis ist analog zu (a). □

Satz 3.3.2 Sei G eine Fuchssche Gruppe. Wenn $|\Lambda(G)| \geqslant 2$ ist, dann ist $\Lambda(G)$ der Abschluss der Menge aller Fixpunkte aller hyperbolischen Elemente von G:

$$\Lambda(G) = \overline{\bigcup_{\substack{g\in G \\ g \text{ ist hyp.}}} \mathrm{Fix}(g)}. \tag{3.3.3}$$

Beweis. Zuerst beweisen wir, dass G mindestens ein hyperbolisches Element enthält. Wenn $G \setminus \{1\}$ nur elliptische Elemente enthält, dann ist $G \cong \mathbb{Z}_n$ nach Folgerung 2.7.4. Dann wäre $\Lambda(G) = \emptyset$.

Angenommen, dass $G \setminus \{1\}$ nur parabolische Elemente enthält. Sei $T \in G$ ein parabolisches Element. Nach einer passenden Konjugation können wir annehmen, dass $T : z \mapsto z + k$ und somit $\mathrm{Fix}(T) = \{\infty\}$ ist. Dann existiert $S \in G$ mit $\infty \notin \mathrm{Fix}(S)$. (Sonst wäre $\{\infty\}$ ein G-orbit, dann wäre G eine elementare Fuchssche Gruppe, dann wäre G zyklisch (nach Satz 2.7.5) mit einem parabolischen Erzeuger, dann wäre $\Lambda(G) = \{\infty\}$, was unmöglich ist.)

Sei $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc = 1$. Da $\infty \notin \mathrm{Fix}(S)$ ist, ist $c \neq 0$. Dann gilt:

$$\left|\mathrm{Tr}(T^n S)\right| = \left|\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & nk \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right| = \left|a + d + nkc\right| > 2$$

für groß genug n. Daraus folgt, dass $T^n S$ ein hyperbolisches Element für groß genug n ist. Ein Widerspruch.

Also enhält G ein hyperbolisches Element g_0. Sei $\mathrm{Fix}(g_0) = \{\beta, \gamma\}$. Nach Lemma 3.3.1 gilt

$$\Lambda(G) \subseteq \overline{G(\beta)} \cup \overline{G(\gamma)}.$$

Das liegt in der rechten Seite der Formel (3.3.3), weil für alle $g \in G$ gilt: $g(\{\beta, \gamma\}) = \mathrm{Fix}(gg_0g^{-1})$ und gg_0g^{-1} ist hyperbolisch.

Die rechte Seite von (3.3.3) liegt in $\Lambda(G)$, weil $\Lambda(G)$ abgeschlossen ist (Aufgabe 1(a) im Übungsblatt 4). $\square$

Definition 3.3.3 Sei X ein topologischer Raum und sei $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

(a) M heißt *dicht* in X, falls $\overline{M} = X$ ist.

(b) Ein Punkt $m \in M$ heißt *isolierter* Punkt von M, falls es eine Umgebung U von m gibt, die keine anderen Elemente aus M enthält.

(c) M heißt *insichdicht*, falls M keine isolierten Punkte besitzt. Mit anderen Worten, es gilt $M \subseteq \mathrm{HP}(M)$.

(d) Abgeschlossene insichdichte Mengen M heißen *perfekt*. Mit anderen Worten, es gilt $M = \mathrm{HP}(M)$.

(e) M heißt genau dann *nirgends dicht*, wenn M in keiner Umgebung eines ihrer Elemente dicht liegt. Dies ist äquivalent dazu, dass jede Umgebung jedes $m \in M$ eine nichtleere offene Teilmenge enthält, die keine Elemente von M enthält.

Bemerkung 3.3.4 Die Cantor-Menge ist eine überabzählbare, abgeschlossene, insichdichte und nirgends dichte Teilmenge der reellen Zahlen.

Satz 3.3.5 Sei G eine Fuchssche Gruppe. Wenn $|\Lambda(G)| \geqslant 3$ ist, dann gilt genau eine der folgenden Assagen:
(1) $\Lambda(G) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
(2) $\Lambda(G)$ ist perfekt und nirgends dicht in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Beweis. Seien α, β, γ beliebige drei Punkte in $\Lambda(G)$. Nach Lemma 3.3.1 gilt

$$\alpha \in \mathrm{HP}(G(\beta)) \cup \mathrm{HP}(G(\gamma)) \subseteq \mathrm{HP}(\Lambda(G)).$$

Also gilt $\Lambda(G) \subseteq \mathrm{HP}(\Lambda(G))$. Da $\Lambda(G)$ abgeschlossen ist, ist $\Lambda(G)$ perfect.

Angenommen $\neg(1)$. Wir beweisen, dass $\Lambda(G)$ nirgens dicht in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist.
Sei $U := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \setminus \Lambda(G) \neq \emptyset$. Da U eine nichtleere offene Menge ist, enthält U unendlich viele Elemente. Nach Lemma 3.3.1 existiert $\beta \in U$ mit $\alpha \in \mathrm{HP}(G(\beta))$.

Sei V eine beliebige Umgebung von α in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann existiert $g \in G$ mit $g(\beta) \in V$. Da g eine stetige Abbildung auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist, existiert eine offene Teilmenge U_1 in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\beta \in U_1 \subset U$ und $g(U_1) \subseteq V$. Wir haben

$$U \cap \Lambda(G) = \emptyset \Rightarrow U_1 \cap \Lambda(G) = \emptyset \Rightarrow g(U_1) \cap \Lambda(G) = \emptyset.$$

Also enthält V die offene Teilmenge $g(U_1)$, und $g(U_1)$ ist frei von Elementen aus $\Lambda(G)$. Deswegen ist $\Lambda(G)$ nirgends dicht in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. $\square$

3.4 Struktur des Dirichlet-Bereichs

In dem Abschnitt wird G diskret sein.

Definition 3.4.1

(a) Ein Punkt $z \in D_p(G)$ heißt *geometrisches Eckpunkt* von $D_p(G)$, wenn $z = L_p(T) \cap L_p(T')$ für einige $T, T' \in G$ ist.

(b) Eine Menge der Form $L_p(T) \cap D_p(G)$ mit $T \in G$ heißt *geometrische Seite* von $D_p(G)$, wenn sie mindestens zwei Punkte enthält.

Bemerkung 3.4.2 Geometrische Seiten von $D_p(G)$ sind abgeschlossen. Wir werden zeigen, dass sie entweder geodäte Segmente, oder geodäte Strahlen, oder vollen Geodäten sind. Man kann zeigen, dass $D_p(G)$, betrachtet als Teil von $\widehat{\mathbb{H}}$, von (möglicherweise unendlich vielen) seinen geometrischen Seiten und Segmenten von $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ beschränkt ist.

Lemma 3.4.3 Sei $M = \{z_i \mid i \in I\}$ eine Teilmenge von $\mathbb{H}$, so dass $z_i = L_p(T_i) \cap L_p(T_i')$ für einige $T_i, T_i' \in G$ ist. Dann ist $\mathrm{HP}(M) = \emptyset$.
Insbesondere sind Eckpunkte von $D_p(G)$ voneinander isoliert.

Beweis. Angenommen: $(z_i)_{i \geqslant 1}$ eine Folge verschiedenen Elemente aus M, die gegen einen Punkt z_0 konvergiert. Aus $z_i \in L_p(T_i)$ folgt

$$\rho(p, z_i) = \rho(T_i(p), z_i) = \rho(p, T_i^{-1}(z_i)).$$

Es existiert $r > 0$, so dass $\rho(z_i, z_0) \leqslant r$ für alle i ist. Dann gilt $\rho(T_i^{-1}(z_i), T_i^{-1}(z_0)) \leqslant r$. Daraus folgt

$$\rho(p, T_i^{-1}(z_0)) \leqslant \rho(p, z_0) + 2r.$$

Analog gilt

$$\rho(p, T_i'^{-1}(z_0)) \leqslant \rho(p, z_0) + 2r.$$

Also liegen alle Punkte $T_i^{-1}(z_0)$ und $T_i'^{-1}(z_0)$ in einem kompakten Bereich. Da G total unzusammenhängend auf $\mathbb{H}$ operiert, muss die Menge $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{T_i, T_i'\}$ endlich sein. Ein Widerspruch. $\square$

Lemma 3.4.4 Mindestens ein Punkt von $\bigcup_{T \in G \setminus \{1\}} L_p(T)$ in $D_p(G)$ liegt.

Beweis.

Lemma 3.4.5 Sei $T \in G$. Wenn $L_p(T) \cap D_p(G) \neq \emptyset$ ist, dann gilt eine von zwei:

(1) $L_p(T) \cap D_p(G)$ ist ein geometrisches Eckpunkt von $D_p(G)$.

(2) $L_p(T) \cap D_p(G)$ ist eine geometrische Seite von $D_p(G)$. Sie ist entweder ein geodätes Segment, oder eine geodäte Strahl, oder die ganze Geodäte $L_p(T)$. Die Endpunkte des Segments und der Anfangspunkt der Strahl sind Eckpunkte von $D_p(G)$.

Beweis.

Definition 3.4.6 Kongruente Punkte. Elliptische Punkte in F.
Ordnung 2. Eckpunkte und Seiten von F.
Zyklen in F. Elliptische Zyklen. Winkel
Jedes Zyklus in F enthält nur endlich viele Eckpunkte.
Stabilisatoren von Punkten sind endlich.

Satz 3.4.7 Sei G eine Fuchssche Gruppe und sei $D_p(G)$ ein Dirichlet-Bereich für G. Es gibt eine Bijektion zwischen den elliptischen Zyklen in F und den Konjugationsklassen nichttrivialen maximalen endlichen Untergruppen von G.

Satz 3.4.8 Sei G eine Fuchssche Gruppe und sei $D_p(G)$ ein Dirichlet-Bereich für G. Sei $P_1, P_2, \ldots, P_t$ ein Zyklys in F und sei $\widehat{P_i}$ der Winkel bei P_i in F. Sei $m = |\mathrm{St}_G(P_1)|$. Dann gilt

$$\widehat{P}_1 + \cdots + \widehat{P}_t = \frac{2\pi}{m}.$$

Definition 3.4.9 Kongruente Seiten

Satz 3.4.10 Sei $\{\ell_i \,|\, i \in I\}$ die Menge der Seiten von $D_p(S)$. Für jede Seite ℓ_i existiert genau eine andere Seite ℓ_j, die kongruent zu l ist. Sei $T_i\ell_i = \ell_j$ für ein $T_i \in G$. Dann gilt $G = \langle T_i \,|\, i \in I\rangle$.