Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: Di, 22.12.2020, 12:00 Uhr

Grenzfragen der Gruppentheorie und Logik
(WiSe 2020/21)

Übungsblatt 7

Definition:

1) Seien x, y zwei Elemente einer Gruppe G. Der *Kommutator* von x, y ist das Element

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy.$$

Der *Kommutant* der Gruppe G ist ihre Untergruppe die von allen Kommutatoren $[x, y]$ erzeugt ist, wobei x, y durch G läuft:

$$[G, G] := \langle [x, y] \,|\, x, y \in G \rangle.$$

2) Das *Zentrum* der Gruppe G ist ihre Untergruppe

$$Z(G) = \{g \in G \,|\, gx = xg \text{ für alle } x \in G\}.$$

Aufgabe 1. Beweisen Sie: Die Untergruppen $[G, G]$ und $Z(G)$ sind normal in G. **3+3P.**

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}_3$ die Präsentation $\langle a, b \,|\, a^{-5}b^2,\ a^6b^{-3} \rangle$ hat. **7P.**

Aufgabe 3. Sei G die Gruppe der oberen 3×3-Dreiecksmatrizen über $\mathbb{Z}$ mit 1 auf der Hauptdiagonale bezüglich Multiplikation: **3+3+6+3**

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & k \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, n, k, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

a) Beweisen Sie, dass die Gruppe G von folgenden Matrizen erzeugt ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Überprüfen Sie: $[A, B] = C$.

c) Beweisen Sie: $[G, G] = Z(G) = \langle C \rangle$.

d) Beweisen Sie, dass jede Matrix $X \in G$ eindeutig in der Form $X = A^\alpha B^\beta C^\gamma$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ darstellbar ist.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass die Gruppe G aus Aufgabe 3 folgende Präsentation hat **12P.**

$$\langle a, b, c \,|\, [a, b] = c,\ [a, c] = 1,\ [b, c] = 1 \rangle.$$