Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: Di, 1.12.2020, 12:00 Uhr

Grenzfragen der Gruppentheorie und Logik
(WiSe 2020/21)

Übungsblatt 4

Schauen Sie noch einmal das Skript an.

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ eine totale rekursive Funktion und sei $a \in \mathbb{N}$. **8P.**
Beweisen Sie, dass folgende Menge rekursiv ist:

$$M = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) = a\}.$$

Aufgabe 2. Seien A und B zwei rekursiv aufzählbare Teilmengen von $\mathbb{N}^n$. **6+6P.**
Beweisen Sie, dass die Mengen $A \cap B$ und $A \cup B$ rekursiv aufzählbar sind.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine totale rekursive Funktion, so dass $f(n) \geqslant n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Beweisen Sie, dass das Bild von f rekursiv ist. **10P.**

Hinweis. Benutzen Sie die Funktion $g(x) = \prod_{i=0}^{x} |x - f(i)|$.

Aufgabe 4. Eine partiell rekursive Funktion $F(x, y)$ heißt *universell*, wenn für jede partiell rekursive Funktion $f(x)$ ein $y_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f(x) = F(x, y_0)$ gilt. **10P.**
Es ist bekannt, dass eine solche F existiert. Beweisen Sie, dass die Menge

$$M = \{x \mid F(x, x) = 0\}$$

nicht rekursiv ist.