Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: Di, 10.11.2020, 12:00 Uhr

Grenzfragen der Gruppentheorie und Logik

(WiSe 2020/21)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind: **3+3+4P.**

a) $\mathrm{Add}(x, y) = x + y$;
b) $\mathrm{Mult}(x, y) = xy$;
c) $\min(x, y)$.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind: **6+6P.**

a)

$$\tau(x) = \begin{cases} \text{Die Anzahl der Teiler von } x, & \text{falls } x \geqslant 1 \text{ ist,} \\ 0, & \text{falls } x = 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

b)

$$\sigma(x) = \begin{cases} \text{Die Summe der Teiler von } x, & \text{falls } x \geqslant 1 \text{ ist,} \\ 0, & \text{falls } x = 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Hinweis. Sie dürfen $\sum\limits_{i=1}^{x}$ und die Funktionen $\mathrm{sg}(x)$, $\overline{\mathrm{sg}}(x)$ und $\mathrm{rest}(x, y)$ verwenden.

Aufgabe 3. Wir definieren folgende Funktionen: **9P.**

$p(x)$ ist die x-te Primzahl. Also gilt $p(0) = 2$, $p(1) = 3$, $p(2) = 5$ u.s.w.

$\mathrm{ex}(x, y)$ ist die Exponente von $p(x)$ in der Primzahlzerlegung von y, falls $y \geqslant 2$ ist; dabei ist $\mathrm{ex}(x, 1) = \mathrm{ex}(x, 0) = 0$.

Beweisen Sie:

$$\mathrm{ex}(x, y) = (\mu z \leqslant x)[(\overline{\mathrm{sg}} \circ \mathrm{rest})(y, p(x)^{z+1}) \cdot \mathrm{sg}(y) = 0].$$

Aufgabe 4*. (schwer) In Vorlesung 1 wurden die Funktionen a_i $(i = 0, 1, \dots)$ wie folgt definiert: **9P.**

$$\begin{aligned} a_0(x) &= x + 1, \\ a_{i+1}(x) &= a_i[x + 2](x). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass jede Funktion a_i partiell rekursiv ist.

Hinweis. Siehe die Notation $f[n](x)$ im Skript. Sie dürfen den unbegrenzten μ-Operator verwenden.