Prof. Dr. Oleg Bogopolski | Abgabe: 3.12. bis 12:30 Uhr

Geometrische Gruppentheorie
Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Seien **12P.**

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Der Satz 1.4 besagt, dass die Gruppe $\langle A, B\rangle$ frei von Rang 2 ist.

Betrachten Sie einen der gebliebenen Fälle im Beweis, den ich präsentiert habe:
Fall 3. Sei $w = A^{\pm}A^{\pm}v$.
Beweisen Sie, dass in diesem Fall $b \equiv 2b' \pmod 3$ ist.

Aufgabe 2. **14P.**

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Zwei Teilmengen C und D von X heißen *G-prekongruent*, falls disjunkte Teilmengen $C_1, \dots, C_n \subseteq C$, disjunkte Teilmengen $D_1, \dots, D_n \subseteq D$ und Elemente $u_1, \dots, u_n \in G$ existieren, für die gilt:
(i) $C = \bigcup\limits_{j=1}^{n} C_j$ und $D = \bigcup\limits_{j=1}^{n} D_j$,
(ii) $u_j \cdot C_j = D_j,\ j = 1, \dots, n$.

Beweisen Sie: Sind C und D G-prekongruent, dann ist C G-paradoxal genau dann, wenn D G-paradoxal ist.

Aufgabe 3. Sei $F = F(a, b)$ die freie Gruppe mit der Basis a, b. **14P.**
(a) Beweisen Sie, dass ihre Untergruppe $H = \langle a, b^2, bab^{-1}\rangle$ Index 2 in F hat.
(b) Finden Sie zwei weitere Untergruppen von Index 2 in $F(a, b)$.