Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: 26.11. bis 12:30 Uhr

Geometrische Gruppentheorie
Übungsblatt 7

Aufgabe 1. **14P.**

(a) Sei r eine Rotation um α Grad und s eine Spiegelung.
Beweisen Sie, dass $s^{-1}rs$ eine Rotation um $-\alpha$ Grad ist.

(b) Sei r eine Rotation um α Grad und g eine orientierungserhaltende Isometrie der Ebene. Beweisen Sie, dass $g^{-1}rg$ eine Rotation um α Grad ist.

Aufgabe 2. Sei n eine natürliche Zahl und sei G eine Gruppe mit der Präsentation **14P.**

$$\langle a, b \,|\, a^n = 1, a^{-1}ba = b\rangle.$$

(a) Beweisen Sie, dass G unendlich ist.

(b) Beweisen Sie die stärkere Aussage: $G \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}$.

Hinweis zu (a). Sei $N = \langle\!\langle a^n, a^{-1}bab^{-1}\rangle\!\rangle_{F(a,b)}$. Beweisen Sie, dass die Ordnung der Nebenklasse bN in der Faktorgruppe $F(a,b)/N$ unendlich ist.

Hinweis zu (b). Beweisen Sie, dass der Kern des Epimorphismus $\varphi : F(a,b) \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}$, gegeben durch $a \mapsto (1,0)$, $b \mapsto (0,1)$, gleich N ist.

Aufgabe 3. Sei n eine natürliche Zahl und sei D_n eine Gruppe mit der Präsentation **12P.**

$$\langle a, b \,|\, a^2 = 1, b^n = 1, a^{-1}ba = b^{-1}\rangle.$$

Beweisen Sie, dass $|D_n| = 2n$ ist.