Prof. Dr. Oleg Bogopolski — Abgabe: 29.10. bis 12:30 Uhr

Geometrische Gruppentheorie
Übungsblatt 3

Aufgabe 1. **3+3P.**

(a) Sei $n \geqslant 2$. Finden Sie eine Untergruppe $B \leqslant S_n$, so dass $S_n = A_n \rtimes B$ ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Beweisen Sie, dass $S_4 = K \rtimes S_3$ ist, wobei $K = \{id, (12)(34), (13)(24), (23)(14)\}$ ist.

Aufgabe 2. Seien A und B zwei Gruppen. Beweisen Sie, dass ihr Kranzprodukt $A \wr B$ eine Gruppe ist. **10P.**

Hinweis. Lesen Sie die Definition des Kranzproduktes im Abschnitt 3 des Kurzskriptes.

Aufgabe 3. Seien $A = \{e, a\} \cong \mathbb{Z}_2$ und $B = \{e, b, b^2, b^3, b^4\} \cong \mathbb{Z}_5$. Wir betrachten zwei Elemente bf und b^3g des Kranzproduktes $A \wr B$, wobei die Funktionen $f : B \to A$ und $g : B \to A$ wie folgt definiert sind: **10P**

$$f(e) = a,\ f(b) = e,\ f(b^2) = a,\ f(b^3) = a,\ f(b^4) = e,$$
$$g(e) = a,\ g(b) = a,\ g(b^2) = e,\ g(b^3) = a,\ g(b^4) = e.$$

Berechnen Sie das Produkt $bf \cdot b^3g$ in $A \wr B$.

Aufgabe 4. Das Zentrum einer Gruppe G wird so definiert: **4+10P.**

$$Z(G) := \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in G\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass $Z(G)$ eine Untergruppe von G ist.

(b) Berechnen Sie $Z(A \wr B)$, wobei $A = \{e_1, a\} \cong \mathbb{Z}_2$ und $B = \{e_2, b\} \cong \mathbb{Z}_2$ sind.