Prof. Dr. Oleg Bogopolski — Abgabe: 22.10. bis 12:30 Uhr

Geometrische Gruppentheorie
Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Wir betrachten die multiplikative Gruppe G aller Matrizen der Form **4+5+4P.**

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Auch betrachten wir die folgende Untergruppe von G:

$$H \quad = \{g \in G \mid g_{12} = g_{23} = 0\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass H normal in G ist.

(b) Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & G \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \\ & g \to (g_{12}, g_{23}). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass φ ein surjektiver Homomorphismus ist.

(c) Beweisen Sie: $G/H \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Hinweis. Unter $\mathbb{R}$ verstehen wir die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$.

Aufgabe 2. **12+2P.**

Sei F eine freie abelsche Gruppe mit der Basis f_1, f_2, f_3 und sei A die Untergruppe von F, die von

$$\begin{aligned} a_1 &= 2f_1 + f_2 + f_3, \\ a_2 &= 4f_1 + 4f_2 + 6f_3, \\ a_3 &= \phantom{2f_1 + {}} f_2 + 2f_3, \end{aligned}$$

erzeugt ist.

(a) Finden Sie eine Basis f_1', f_2', f_3' von F und eine Basis $a_1', \ldots, a_k'$ von A, so dass $a_i' = m_i f_i'$ mit $m_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \ldots, k$ ist.

(b) Zerlegen Sie F/A in die direkte Summe von endlichen und unendlichen zyklischen Gruppen.

Fortsetzung Seite 2

Definition. Sei G eine Gruppe. Wir sagen, dass G ein *inneres direktes Produkt* ihrer Untergruppen A und B ist, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$,
(2) $A \cap B = \{e\}$,
(3) $G = AB$.

Aufgabe 3. Sei $G = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$. **7+6P.**

(a) Finden Sie alle Untergruppen von G, die isomorph zu $\mathbb{Z}_4$ sind.

(b) Es ist klar, dass G ein inneres direktes Produkt von $A := \{(i, 0) \mid i \in \mathbb{Z}_4\}$ und $B := \{(0, i) \mid i \in \mathbb{Z}_4\}$ ist. Finden Sie zwei Untergruppen A_1 und B_1 von G, so dass $A_1 \neq A$, $B_1 \neq B$ ist und G ein inneres direktes Produkt von A_1 und B_1 ist.