Prof. Dr. Oleg Bogopolski — Abgabe: 15.10. bis 12:30 Uhr

Geometrische Gruppentheorie
Übungsblatt 1

Aufgabe 1. **6+4P.**

(a) Berechnen Sie die Menge aller linken Nebenklassen von $H = \{id, (123), (132)\}$ in A_4.
(A_n ist die Gruppe aller geraden Permutationen der Symbole $1, 2, \ldots, n$.)

(b) Ist H normal in A_4? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2. Listen Sie alle normalen Untergruppen von A_4 auf. **10P.**

Hinweis:

- Benutzen Sie den Satz von Lagrange: *Ist H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G, dann ist $|H|$ ein Teiler von $|G|$.*
- Sie dürfen auch den folgenden bekannten Fakt benutzen: A_4 hat keine Untergruppen der Ordnung 6.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe und sei M eine Teilmenge von G. Wir definieren zwei Teilmengen von G: **2+8P.**

$$\begin{aligned} M^{-1} &:= \{g^{-1} \,|\, g \in M\}, \\ \langle M \rangle &:= \{g_1 g_2 \ldots g_k \,|\, k \in \mathbb{N},\, g_i \in M \cup M^{-1},\, i = 1, \ldots, k\}. \end{aligned}$$

(a) Beweisen Sie, dass $\langle M \rangle$ eine Untergruppe von G ist.
(Diese Untergruppe heißt *von M erzeugte Untergruppe*.)

(b) Beweisen Sie, dass die Untergruppe $\langle (13), (1234) \rangle$ von S_4 genau 8 Elemente enthält.

Aufgabe 4. Lesen Sie den Beweis des folgenden Satzes in der gegebenen Literatur und schreiben Sie diesen Beweis ausführlich auf: **10P.**

Satz. Sei $H \trianglelefteq G$ und sei $B \leqslant G$. Dann gilt $BH/H \cong B/(B \cap H)$.