Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

WiSe 2014/15
Abgabe am 25.11.2014
vor der Übung.

Fuchssche Gruppen
Übungsblatt 3

Aufgabe 1.

(1) Sei G eine topologische Gruppe. Sei N eine normale Untergruppe von G.
   (a) Beweisen Sie, dass G/N eine topologische Gruppe bezüglich der Faktortopologie ist. [5 P.]
   (b) Beweisen Sie, dass G/N Hausdorff genau dann ist, wenn N abgeschlossen in G ist. [5 P.]

(2) In Definition 2.4.1 ist eine Topologie für $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ erklärt. Beweisen Sie, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine topologische Gruppe bezüglich dieser Topologie ist. [2 P.]

Hinweis: Lesen Sie Abschnitte 2.2, 2.3 (insbesondere Definition 2.3.1) und 2.4 des Skripts im Netz.

Aufgabe 2.

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Abbildung $\varphi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.
Beweisen Sie, dass φ_A euklidsche Geraden in $\mathbb{C}$ auf euklidsche Geraden oder Kreise abbildet. Unter Geraden in $\mathbb{C}$ verstehen wir alle Geraden, und nicht nur die, die durch 0 laufen. [5 P.]

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Skizzieren Sie genau die Bilder der folgenden Geraden unter T_A:

$$L_1 := \{-1 + ti \,|\, t > 0\}, \quad L_2 := \{ti \,|\, t > 0\}, \quad L_3 := \{1 + ti \,|\, t > 0\},$$

$$M_1 = \{t + i \,|\, t \in \mathbb{R}\}, \quad M_2 = \{t + 2i \,|\, t \in \mathbb{R}\}, \quad M_3 = \{t + 3i \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

[5 P.]

Aufgabe 3. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für $X \in \{A, B\}$ bestimmen Sie den Typ der Möbiustransformation T_X, berechnen Sie $\widehat{\mathrm{Fix}}(T_X)$ und finden Sie alle T_X-invarianten Geodäten in $\mathbb{H}$. [5 P.]

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 4.

(a) Sei $\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ der kanonische Epimorphismus. Beweisen Sie, dass eine Untergruppe H in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ diskret ist genau dann, wenn ihr Urbild $\varphi^{-1}(H)$ diskret in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist. [5 P.]

(b) Beweisen Sie, dass jede Fuchssche Gruppe abzählbar ist. [5 P.]

Aufgabe 5. Sei $r > 0$. Wir betrachten die Möbiustransformationen

$$\begin{aligned} \theta_r : &\quad z \to rz, \\ \psi : &\quad z \mapsto -\frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass die Untergruppe $H_r := \langle \theta_r, \psi \rangle$ diskret in $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$ ist. [5 P.]

Keine weiteren Aufgaben!