Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

WiSe 2014/15
Abgabe am 11.11.2014
vor der Übung.

Fuchssche Gruppen
Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Beweisen Sie den Satz 1.3.5.: Das Doppelverhältnis ist $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$-invariant. [6 P.]

Aufgabe 2.
a) Beweisen Sie, dass $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$ 1-transitiv auf $\mathbb{H}$ operiert[1]. [3 P.]
b) Beweisen Sie, dass $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$ nicht 2-transitiv auf $\mathbb{H}$ operiert. [2 P.]
c) Berechnen Sie den Stabilisator von i in $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$: [3 P.]

$$\text{St}_{\text{Möb}_{\mathbb{R}}}(i) := \{T \in \text{Möb}_{\mathbb{R}} \,|\, T(i) = i\}.$$

d) Sei r eine beliebige positive reelle Zahl. Beweisen Sie, dass $\text{St}_{\text{Möb}_{\mathbb{R}}}(i)$ 1-transitiv auf dem Kreis $\{z \in \mathbb{H} \,|\, \rho(z, i) = r\}$ operiert. [8 P.]

Aufgabe 3. Für je zwei verschiedene Punkte $u, v \in \mathbb{H}$ heißt die Menge

$$\text{Equidist}(u, v) := \{z \in \mathbb{H} \,|\, \rho(z, u) = \rho(z, v)\}$$

Equidistante von u und v.

a) Beweisen Sie, dass die Equidistante gleich der Geodäte der Form I_r, oder K_{r_1,r_2} ist. [4 P.]
b) Geben Sie eine genaue Formel für $\text{Equidist}(1 + i, 3 + 3i)$. [3 P.]
c) Malen Sie die Menge aus b). [1 P.]

Hinweis. Benutzen Sie Formel (2) oder (3) aus dem Satz 1.3.8 des Skripts im Netz.

Aufgabe 4. Wir betrachten $\eta : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto -\bar{z}$. Überprüfen Sie:
a) $\eta \in \text{Isom}H$. [2 P.]
b) $\eta \notin (\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$. [2 P.]

Aufgabe 5. Wir betrachten zwei Kurven:

$$\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{H}, \quad \gamma_1(t) = (-1 + 2t) + 2i,$$
$$\gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{H}, \quad \gamma_2(t) = (1 + 2t)i.$$

Beweisen Sie, dass für jede Möbiustransformation T der Winkel zwischen $T \circ \gamma_1$ und $T \circ \gamma_2$ im Punkt $T(2i)$ gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. [6 P.]

Aufgabe 2 wurde verbessert und vervollständigt. Aufgabe 5 ist auch neu. Keine weitere Aufgaben!

[1] Operiert eine Gruppe G auf einer Menge X, dann heißt diese Operierung n-transitiv, falls für je zwei Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(x'_1, \ldots, x'_n)$ der Elemente aus X mit $x_i \neq x_j$ und $x'_i \neq x'_j$ für alle $i \neq j$ ein Element $g \in G$ mit $g(x_1) = x'_1, \ldots, g(x_n) = x'_n$ existiert.