Seminar „Facetten der Geometrischen Gruppentheorie"
Prof. Oleg Bogopolski

Das Wachstum der ersten Grigorchuk-Gruppe

Maximilian Wiesmann

12. Dezember 2017

Im letzten Vortrag wurde das von Neumann-Day Problem behandelt, welches u.a. fragt, ob die Inklusion $EG \subseteq AG$ strikt ist. Um zu zeigen, dass $EG \neq AG$ ist, wurde bereits die erste Grigorchuk-Gruppe Γ eingeführt und gezeigt, dass $\Gamma \notin EG$ ist; es bleibt jetzt noch zu zeigen, dass Γ in AG liegt, d.h. dass Γ amenable ist. In den vorherigen Vorträgen haben wir bereits mehrere Kriterien für Amenabilität kennengelernt, eines davon über das Wachstum einer Gruppe.

Ziel dieser Arbeit ist es, zu zeigen, dass das Wachstum der ersten Grigorchuk-Gruppe subexponentiell ist. Grundlage sind ALEJANDRA GARRIDO, *An introduction to amenable groups*, Abschnitte 3.2 und 4.2 sowie PIERRE DE LA HARPE, *Topics in Geometric Group Theory*, Seiten 211 - 252.

Die ersten Definitionen und Bemerkungen (bis einschließlich Bem. 3) dienen der Erinnerung.

Definition 1. Eine Gruppe G hat *subexponentielles Wachstum*, wenn $\lim_{n\to\infty} \gamma_G(n)^{\frac{1}{n}} \leq 1$ ist.

Definition 2. Seien $\mathcal{T}$ der unendliche binäre Baum, $\mathcal{T}_0$ der linke, und $\mathcal{T}_1$ der rechte Teilbaum von $\mathcal{T}$. Dann ist die *erste Grigorchuk-Gruppe* $\Gamma = \langle a, b, c, d\rangle \leq Aut(\mathcal{T})$ (Automorphismen von $\mathcal{T}$ fixieren die Wurzel und permutieren Teilbäume von $\mathcal{T}$), wobei a der Automorphismus ist, der $\mathcal{T}_0$ und $\mathcal{T}_1$ miteinander vertauscht, und b, c und d wie folgt rekursiv definiert sind:

$$b = (a, c),\ c = (a, d),\ d = (1, b)$$

Dabei bedeutet die Notation, dass b so auf $\mathcal{T}_0$ operiert wie a auf $\mathcal{T}$, und auf $\mathcal{T}_1$ so operiert wie c auf $\mathcal{T}$, usw.

Die Abbildungen 1 und 2 (aus *An introduction to amenable groups*, S. 13f.) veranschaulichen die Wirkung von a, b, c und d.

Bemerkung 1. (i) $\{1, b, c, d\} \cong \mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K}$ die Kleinsche Vierergruppe ist.

(ii) Durch Konjugation eines Automorphismus mit a wird die Wirkung auf $\mathcal{T}_0$ mit der auf $\mathcal{T}_1$ vertauscht.

Bezeichnung 1. Mit $St_\Gamma(n)$ bezeichnen wir die Untergruppe von Γ, die $\mathcal{T}$ bis zum n-ten Level fixiert.

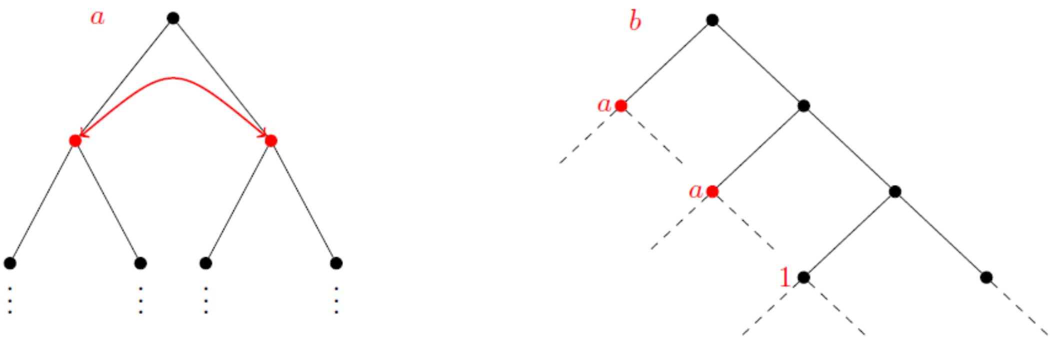

Abbildung 1

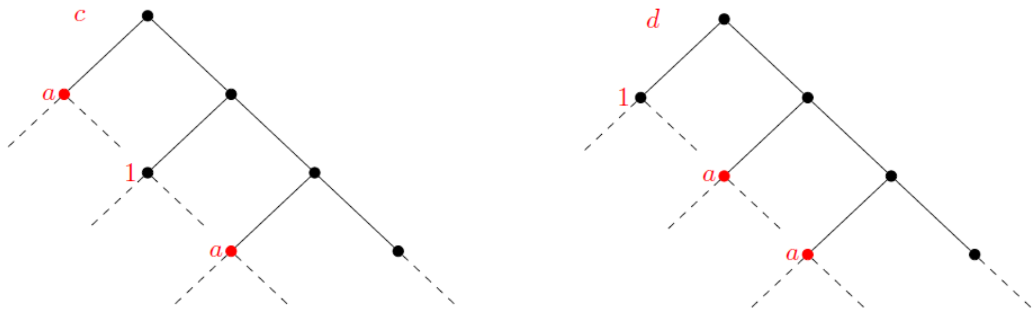

Abbildung 2

Bemerkung 2. Es existiert ein injektiver Homomorphismus

$$\psi = (\varphi_0, \varphi_1) : \begin{cases} St_\Gamma(1) \longrightarrow \Gamma \times \Gamma \\ g \longmapsto (g_0, g_1) \end{cases} ;$$

dieser lässt sich iterativ erweitern zu

$$\psi_n : \begin{cases} St_\Gamma(n) \longrightarrow \Gamma^{2^n} \\ g \longmapsto (g_{i_1,\dots,i_n})_{i_1,\dots,i_n \in \{0,1\}} \end{cases} .$$

Bemerkung 3. Nach Bemerkung 1 wird klar: $St_\Gamma(1) = \langle b, c, b^a, c^a \rangle$. Mit φ_0, φ_1 wie in Bemerkung 2 gilt:

$$\begin{array}{llll} \varphi_0(b) = a & \varphi_1(b) = c & \varphi_0(aba) = c & \varphi_1(aba) = a \\ \varphi_0(c) = a & \varphi_1(c) = d & \varphi_0(aca) = d & \varphi_1(aca) = a \\ \varphi_0(d) = 1 & \varphi_1(d) = b & \varphi_0(ada) = b & \varphi_1(ada) = 1 \end{array}$$

Das folgende Lemma (auch unter der Bezeichnung „Cancellation Lemma“ bekannt) ist essentiell für den Beweis, dass Γ subexponentielles Wachstum hat; es sagt aus, dass man ein Wort w, das einen Automorphismus aus $St_\Gamma(3)$ repräsentiert, durch 8 Wörter ausdrücken kann, die in der Summe kürzer sind als die Länge von w multipliziert mit einem Koeffizienten < 1.

Lemma 1. Sei $g \in St_\Gamma(3)$, dann gilt:

$$\sum_{i,j,k \in \{0,1\}} l(g_{ijk}) \leq \frac{3}{4} l(g) + 8 \quad ,$$

wobei g_{ijk} die reduzierte Form von $\varphi_k(\varphi_j(\varphi_i(g)))$ ist.

Bezeichnung 2. Im Folgenden bezeichnen wir mit w das kürzeste Wort über dem Alphabet $\{a, b, c, d\}$, welches $g \in St_\Gamma(3)$ repräsentiert.

Um die Aussage von Lemma 1 besser zu verstehen, betrachten wir ein Beispiel mit $w = (babadaba)^2$; man kann zeigen, dass w ein Element aus $St_\Gamma(3)$ repräsentiert. Zu untersuchen ist nun, wie w auf dem dritten Level von $\mathcal{T}$ wirkt. Mit Bemerkung 3 erhält man:

$$w = (\varphi_0(w), \varphi_1(w)) = (ac1cac1c, cabacaba) = (1, cabacaba) = ((1,1), (acac, dada))$$

$$= (((1,1),(1,1)),((da,ad),(1b,b1))) \ .$$

$l(w) = 2 \cdot 8$, folglich gilt: $\sum_{i,j,k \in \{0,1\}} l(w_{ijk}) = 6 \leq 20 = \frac{3}{4} l(w) + 8$.

Bezeichnung 3. Mit w_i bezeichnen wir die reduzierte Form von $\varphi_i(w)$, mit w_{ij} die reduzierte Form von $\varphi_j(w_i)$ und mit w_{ijk} die reduzierte Form von $\varphi_k(w_j)$.

Bezeichnung 4. Seien $x, y, z \in \{a, b, c, d\}$. $|w|_x$ bezeichne die Anzahl in w auftretender x, außerdem seien $|w|_{x,y} = |w|_x + |w|_y$ und $|w|_{x,y,z} = |w|_x + |w|_y + |w|_z$.

Beweis. (von Lemma 1)
Falls $g = 1$ ist, erhalten wir $\sum_{i,j,k \in \{0,1\}} l(g_{ijk}) = 0 \leq \frac{3}{4} \cdot 0 + 8$ und das Lemma gilt. Sei also im Folgenden $g \neq 1$.
Da g die ersten drei Level und damit insbesondere das erste Level fixiert, muss $|w|_a \equiv 0 \mod 2$ sein, da andernfalls $\mathcal{T}_0$ und $\mathcal{T}_1$ durch eine Operation von a vertauscht würden. Außerdem hat w die Form $[x_0]ax_1ax_2a...x_{2m-1}a[x_{2m}]$ mit $x_i \in \{b, c, d\}$, da sonst Kürzungen durchgeführt werden könnten und $l(w)$ nicht minimal wäre. w besitzt folglich eine Länge zwischen $4m - 1$ und $4m + 1$. Es folgt:

$$\frac{l(g) - 1}{2} \leq |w|_{b,c,d} \leq \frac{l(g) + 1}{2} \quad . \tag{1}$$

Weiterhin gilt

$$l(\varphi_0(w)) + l(\varphi_1(w)) \leq l(g) + 1 - |w|_d \quad , \tag{2}$$

denn jedes d in w wirkt entweder auf $\mathcal{T}_0$ oder auf $\mathcal{T}_1$ wie 1 (s. Bem. 3), wodurch $l(\varphi_0(w))$ respektive $l(\varphi_1(w))$ um 1 reduziert wird. Der Summand $+1$ ist erforderlich für den Fall, dass w die Länge $4m + 1$ besitzt. Außerdem gilt

$$|\varphi_0(w)|_{c,d} + |\varphi_1(w)|_{c,d} = |w|_{b,c} \quad , \tag{3}$$

da die Wirkung von c auf einen Teilbaum $\mathcal{T}_i$ genau dann auftritt, wenn ein b in w enthalten ist, und die Wirkung von d auf $\mathcal{T}_i$ genau dann auftritt, wenn ein d in w enthalten ist (s. Bem. 3).

Bezeichnung 5. Für ein Wort v sei $\rho(v)$ die gewichtete Anzahl an Kürzungen, die erforderlich sind, um v in die reduzierte Form zu überführen. Es gibt zwei Arten von Kürzungen, die wie folgt gewichtet werden:

$$\begin{array}{lll} (i) & x_1x_2 \rightsquigarrow x_3, \quad x_1, x_2, x_3 \in \{b, c, d\} \text{ und } x_1 \neq x_2 & \text{hat Gewicht 1} \\ (ii) & xx \rightsquigarrow 1, \quad x \in \{a, b, c, d\} & \text{hat Gewicht 2} \quad . \end{array}$$

Weiterhin seien $\rho_1 := \rho(\varphi_0(w)) + \rho(\varphi_1(w))$ und $\rho_2 := \rho(\varphi_0(w_0)) + \rho(\varphi_0(w_1)) + \rho(\varphi_1(w_0)) + \rho(\varphi_1(w_1))$; ρ_1 und ρ_2 werden im weiteren Beweis nicht näher konkretisiert, sie dienen eher als formale Beschreibung der Anzahl Kürzungen in den Worten, die die Wirkung von w auf dem ersten respektive zweiten Level beschreiben.

Mit dieser Bezeichnung können (1) und (2) umgeschrieben werden zu

$$l(w_0) + l(w_1) \leq l(g) + 1 - |w|_d - \rho_1 \tag{4}$$

$$|w_0|_{c,d} + |w_1|_{c,d} \geq |w|_{b,c} - 2\rho_1 \quad ; \tag{5}$$

der Koeffizient 2 in (5) ist notwendig, da in w_i die Reduktion $cd \rightsquigarrow b \quad |w_i|_{c,d}$ um 2 verringert, diese von ρ_1 jedoch nur mit 1 gewichtet wird.
Da $|w|_{b,c,d} = |w|_{b,c} + |w|_d$ ist, folgt aus (1) und (5):

$$|w_0|_{c,d} + |w_1|_{c,d} \geq \frac{l(g) - 1}{2} - |w|_d - 2\rho_1 \tag{6}$$

Wiederholt angewendet liefert (4)

$$\sum_{i,j \in \{0,1\}} l(w_{ij}) \leq l(g) + 3 - |w|_d - \rho_1 - |w_0|_d - |w_1|_d - \rho_2 \quad . \tag{7}$$

Außerdem können wir, ähnlich wie in (5), schreiben:

$$\sum_{i,j,k \in \{0,1\}} |w_{ij}|_d \geq |w_0|_c + |w_1|_c - 2\rho_2 = |w_0|_{c,d} + |w_1|_{c,d} - |w_0|_d - |w_1|_d - 2\rho_2 \tag{8}$$

Unter Verwendung von (6) lässt sich (8) umformen zu

$$\sum_{i,j,k \in \{0,1\}} |w_{ij}|_d \geq \frac{l(g) - 1}{2} - |w|_d - 2\rho_1 - |w_0|_d - |w_1|_d - 2\rho_2 \tag{9}$$

Wiederholt man (4) bis zur Wirkung von w auf das dritte Level und vernachlässigt dabei ρ_1, so erhält man

$$\sum_{i,j,k \in \{0,1\}} l(w_{ijk}) \leq \sum_{i,j \in \{0,1\}} (l(w_{ij}) + 1 - |w_{ij}|_d) \quad ; \tag{10}$$

(7) und (9) eingesetzt in (10) liefern schließlich:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k \in \{0,1\}} l(w_{ijk}) \leq & l(g) + 3 - |w|_d - \rho_1 - |w_0|_d - |w_1|_d - \rho_2 + 4 \\ & - \left(\frac{l(g) - 1}{2} - |w|_d - 2\rho_1 - |w_0|_d - |w_1|_d - 2\rho_2 \right) \\ \leq & \frac{l(g)}{2} + 8 + \rho_1 + \rho_2 \end{aligned} \tag{11}$$

Es wird eine Fallunterscheidung durchgeführt:
Fall 1: $\rho_1 + \rho_2 \leq \frac{l(g)}{4}$.
In diesem Fall folgt die Aussage des Lemmas aus (11).
Fall 2: $\rho_1 + \rho_2 > \frac{l(g)}{4}$.
Dann gilt wegen (7)

$$\sum_{i,j,k \in \{0,1\}} l(w_{ijk}) \leq \frac{3}{4} l(g) + 3 \quad ,$$

und letztlich mit Hilfe von (10):

$$\sum_{i,j,k \in \{0,1\}} l(w_{ijk}) \leq \sum_{i,j \in \{0,1\}} (l(w_{ij}) + 1) \leq \frac{3}{4} l(g) + 7 \quad ,$$

weshalb auch in diesem Fall die Aussage des Lemmas folgt. □

Satz 1. Die erste Grigorchuk-Gruppe Γ hat subexponentielles Wachstum.

Beweis. Sei $\gamma(k)$ die Wachstumsfunktion von Γ und sei $\omega := \lim_{k\to\infty} \gamma(k)^{\frac{1}{k}}$; es ist zu zeigen, dass $\omega \leq 1$ ist.
Nach Definition von ω gilt:

$$\forall \epsilon \geq 0\ \exists k_0 : (\omega - \epsilon)^k \leq \gamma(k) \leq (\omega + \epsilon)^k \quad \forall k \geq k_0$$

Wir treffen die Widerspruchsannahme $\omega \geq 1$. Dann gilt insbesondere

$$\gamma(k) \leq \gamma(k_0)(\omega + \epsilon)^k \quad \forall k \geq 0 \quad . \tag{12}$$

Behauptung 1. Sei G eine Gruppe, die von einer endlichen Menge S erzeugt wird, sei H eine Untergruppe in G mit Index n und seien $\gamma(k) := |B_S(k)|$ und $\gamma_0(k) := |B_S(k) \cap H|$ die Wachstumsfunktionen von G respektive H. Dann gilt:

$$\gamma(k) \leq n\gamma_0(k + n - 1) \quad \forall k \geq 0$$

Beweis. Sei T ein Schreier-Transversal von H bezüglich G, d.h. aus jeder rechten Nebenklasse von H in G liegt genau ein Repräsentant in T und falls $t \in T$ ist, so liegt auch jedes Anfangswort von t in T. Wir können jedes $h \in H$ schreiben als gt^{-1}, $g \in G$, $t \in T$; t hat maximal die Länge $n - 1$, damit gilt $l(h) \leq l(g) + n - 1$. Da jedes $g \in G$ als $g = ht$, $h \in H$, $t \in T$ geschrieben werden kann und es maximal n verschiedene t gibt, folgt die Behauptung. □

Sei im Folgenden $\gamma_0(k)$ die Wachstumsfunktion von $St_\Gamma(3)$. Um die Behauptung anwenden zu können, benötigen wir Informationen über den Index von $St_\Gamma(3)$ in Γ. Dazu helfen folgende Überlegungen:

$$Aut(\mathcal{T})/St_{Aut(\mathcal{T})}(3) \cong Aut(\mathcal{T}_3) \quad ,$$

wobei $\mathcal{T}_3$ der Binärbaum mit genau drei Level ist. Die Ordnung von $Aut(\mathcal{T}_3)$ ist 2^7, da $\mathcal{T}_3$ sieben Teilbäume besitzt, deren oberste Äste entweder fixiert oder vertauscht werden können. $\Gamma/St_\Gamma(3)$ ist nun genau die Gruppe von Automorphismen auf $\mathcal{T}_3$, die von a, b, c und d (eingeschränkt auf die ersten drei Level) erzeugt werden, sie kann also in $Aut(\mathcal{T}_3)$ eingebettet werden. Der Index von $St_\Gamma(3)$ ist daher $\leq 2^7$.
Nach Behauptung 1 können wir also schreiben

$$\gamma(k) \leq 2^7 \gamma_0(k + 2^7 - 1) \quad . \tag{13}$$

Um das Wachstum von $St_\Gamma(3)$ zu beschreiben, können wir auch das Wachstum von Γ auf den einzelnen acht Teilbäumen des dritten Levels betrachten; da die Abbildung $\psi_3 : \ St_\Gamma(3) \longrightarrow \Gamma^8$ injektiv ist (s. Bem. 2), folgt also:

$$\gamma_0(k) \leq \sum_{X_k} \gamma(k_1) \ldots \gamma(k_8) \tag{14}$$

Die Frage ist, über welche Menge X_k, d.h. über welche Längen $k_1, \ldots, k_8$ von Wörtern, die Automorphismen aus Γ repräsentieren, summiert werden muss. Die Antwort liefert Lemma 1:

$$X_k = \left\{ (k_1, \ldots, k_8) \mid k_1 + \cdots + k_8 \leq \frac{3}{4}k + 8 \right\}$$

Verwenden wir (14) in (13), so erhalten wir

$$\gamma(k) \leq 2^7 \sum_{Y_k} \gamma(k_1) \dots \gamma(k_8) \tag{15}$$

mit $Y_k = \left\{ (k_1, \dots, k_8) \mid k_1 + \dots + k_8 \leq \frac{3}{4}(k + 2^7 - 1) + 8 \right\}$. Sei $N := \frac{3}{4}(k + 2^7 - 1) + 8$. Die Kardinalität von Y_k beträgt dann $\binom{N+8}{8}$, was ein Polynom in k ist, bezeichnet mit $P(k)$. Für jedes $\gamma(k_i)$ aus der Summe in (15) gilt Ungleichung (12), daher erhalten wir

$$\gamma(k) \leq 2^7 \gamma(k_0)^8 P(k)(\omega + \epsilon)^N$$

Folglich gilt:

$$\omega = \lim_{k \to \infty} \gamma(k)^{\frac{1}{k}} \leq \lim_{k \to \infty} \left(2^7 \gamma(k_0)^8 P(k)(\omega + \epsilon)^N \right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \to \infty} \left((\omega + \epsilon)^{\frac{3}{4}k} \right)^{\frac{1}{k}} = (\omega + \epsilon)^{\frac{3}{4}}$$

Da dies für alle $\epsilon \geq 0$ gilt, folgt $\omega \leq \omega^{\frac{3}{4}}$, ein Widerspruch zur Annahme $\omega \geq 1$. Folglich ist $\omega \leq 1$ und Γ hat subexponentielles Wachstum. $\square$

Korollar 1. Die erste Grigorchuk-Gruppe Γ ist amenable.

Korollar 2.

$$EG \subsetneq AG$$